PROGRAMACIÓN LINEAL

El siguiente es material de apoyo a la última parte de la unidad V. Los contenidos correspondientes a la misma son:

- Inecuaciones con una o más variables.
- Sistemas de inecuaciones.
- Aplicaciones de la programación lineal.

Introducción

La Programación Lineal es una técnica matemática muy utilizada en estudios de planificación, que trata de maximizar o minimizar un objetivo primario, sujeto a una serie de restricciones.

Los objetivos más comunes pueden concretarse en dos: maximizar beneficios o rendimientos o bien, minimizar los costos, ya sea monetarios o de medios.

Las restricciones más usuales son de carácter presupuestario, humanos, de tiempo, de energía, etc.

Ejemplos:

1) Maximizar el rendimiento de los quirófanos de un hospital, sin disminuir la calidad del servicio o el tiempo necesario para cada operación y sin incrementar el personal médico.

2) Planificar un territorio, de modo que se minimice el costo de la obra, sujeto a restricciones como un número mínimo de viviendas, un máximo número de hectáreas dedicadas a espacios verdes, un mínimo de escuelas, etc.

Concretemos un ejemplo:

Supongamos que se tienen dos alimentos, **A** y **B**, cuyos costos respectivos son \$200 y \$100 por paquete. Dichos alimentos proporcionan dos nutrientes, **M** y **N**.
Un paquete de alimento A proporciona 300 unidades del nutriente M y 4 del nutriente N.
El alimento B proporciona 100 unidades del nutriente M y 8 del nutriente N por paquete.
Si las necesidades nutritivas son de 30 000 unidades como mínimo del nutriente M y 800 del nutriente N, ¿qué cantidad hay que comprar de cada alimento, para que la inversión sea mínima?

Podemos organizar los datos en una tabla:

	Alimento A (x)	**Alimento B (y)**	
Nutriente M	300	100	30 000
Nutriente N	4	8	800
Costo	\$200	\$100	

Si **x** representa la cantidad de paquetes del alimento **A** e **y** la cantidad de paquetes del alimento **B**, podemos decir que el costo total estará representado por la expresión $\boxed{200 \cdot x + 100 \cdot y}$. Dicho costo deberá minimizarse de acuerdo con las siguientes condiciones:

Nutriente M: $300 \cdot x + 100 \cdot y \geq 30000$

Nutriente N: $4 \cdot x + 8 \cdot y \geq 800$

Además, las variables **x** e **y** no pueden ser negativas, ya que se trata de cantidades de paquetes. Esto podemos expresarlo así: $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Podemos "resumir" la situación matemáticamente así:

$$\text{Minimizar } z = 200 \cdot x + 100 \cdot y \quad \}\text{función objetivo}$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 300 \cdot x + 100 \cdot y \geq 30000 \\ 4 \cdot x + 8 \cdot y \geq 800 \end{array}\right\} \text{restricciones o condiciones estructurales} \\ \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \text{restricciones o condiciones de no negatividad} \end{cases}$$

En general, podemos esquematizar de este modo cualquier problema de Programación Lineal:

$$\text{Optimizar (Maximizar o Minimizar) } z = f(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots x_n) \quad \}\text{función objetivo}$$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} \left.\begin{array}{l} g_1(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots; x_n) \leq 0 \\ g_2(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots; x_n) \leq 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots; x_n) \leq 0 \end{array}\right\} \text{restricciones o condic. estructurales} \\ x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots; x_n \geq 0 \quad \}\text{restricciones o condiciones de no negatividad} \end{cases}$$

La solución del problema consiste en encontrar los valores $x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots x_n$ que optimicen la función objetivo, al tiempo que verifiquen todas las restricciones, tanto las estructurales como las de no negatividad. Dicha solución se llama <u>SOLUCIÓN ÓPTIMA</u>. Las variables $x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots x_n$ se llaman <u>VARIABLES ESTRUCTURALES O DE DECISIÓN</u>.

El conjunto de todas las soluciones posibles se llama <u>CONJUNTO DE SOLUCIONES FACTIBLES</u> o <u>REGIÓN FACTIBLE</u>. Dicho conjunto puede o no estar acotado.

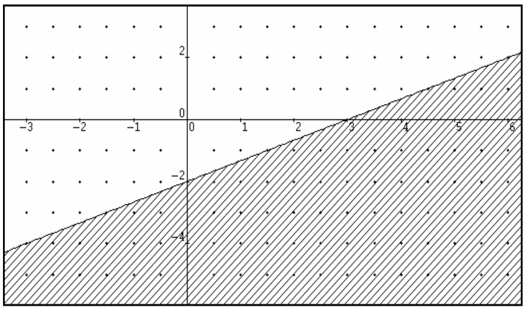
SOLUCIÓN GRÁFICA

Si el problema de programación lineal es en dos variables, como en el ejemplo anterior, admite de manera sencilla una solución gráfica, ya que cada una de las restricciones representa un semiplano.

Ejemplos:

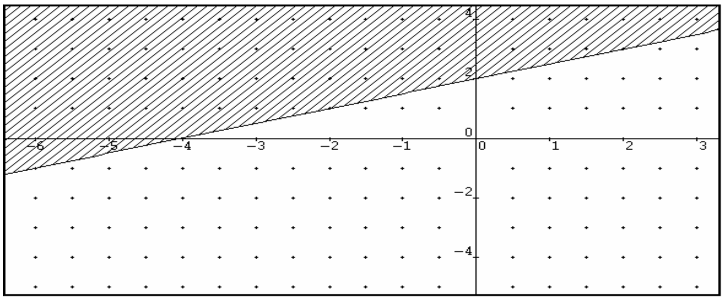
1) Representa gráficamente la inecuación $2x - 3y \geq 6$

Transformamos la desigualdad en una igualdad, la cual representa la recta borde o frontera del semiplano a representar: $2x - 3y = 6$. Es cómodo, si la recta no contiene al origen de coordenadas, expresar dicha ecuación en forma segmentaria para su representación: $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$.

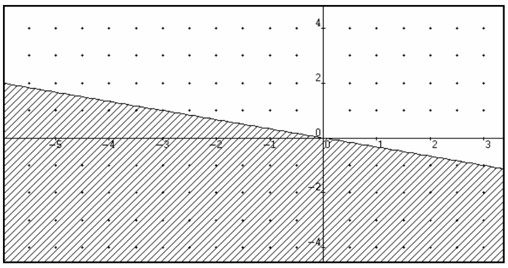


Para decidir cuál es el semiplano deseado se reemplaza cualquier punto de coordenadas $(x; y)$ en la inecuación, observando si dicho punto la satisface o no. Si es posible, se utiliza, por comodidad, el punto $(0;0)$. En efecto, $(0;0)$ no satisface la inecuación, ya que $0 \leq 6$, por lo tanto, se toma al semiplano que no contiene al $(0;0)$.

2) Representa gráficamente la inecuación $-x + 2y \geq 4$



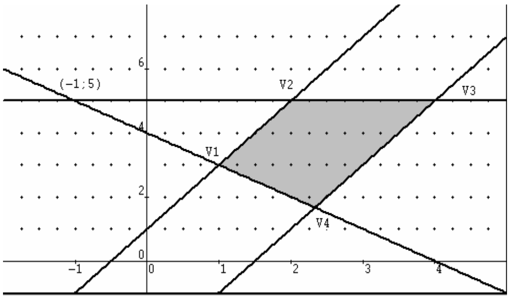
3) Representa gráficamente la inecuación $x + 3y \leq 0$



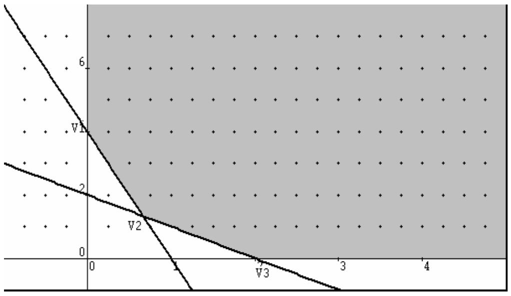
Como la recta $x + 3y = 0$ contiene al punto $(0;0)$, reemplazamos por las coordenadas de cualquier otro punto, para saber si satisface o no la inecuación. Por ejemplo, reemplazando por las coordenadas del punto $(2;2)$, nos queda $2 + 3 \cdot 2 \geq 0$. Por lo tanto, se toma el semiplano que no contiene al punto $(2;2)$.

Cuando las restricciones son varias, el conjunto de soluciones es una porción del plano, que puede estar acotada o no. Dicha porción del plano se llama <u>zona factible</u> o <u>región factible.</u>

Ejemplos:



Acotado



No Acotado

Punto Extremo o Vértice:
Es cada una de las soluciones que son intersección de las rectas que definen las restricciones que determinan la zona o región factible. Si la misma está acotada, los puntos extremos son los vértices de un polígono.

Propiedad: La solución óptima de un problema de Programación Lineal se encuentra siempre en un punto extremo de la región factible.

Observación: No todas las intersecciones de las rectas son puntos extremos o vértices. Por ejemplo, en el gráfico de la izquierda, el punto $(-1;5)$ es intersección de dos rectas pero no es un vértice de la zona factible.

Ejemplo: Maximizar $z = 2x + 3y$

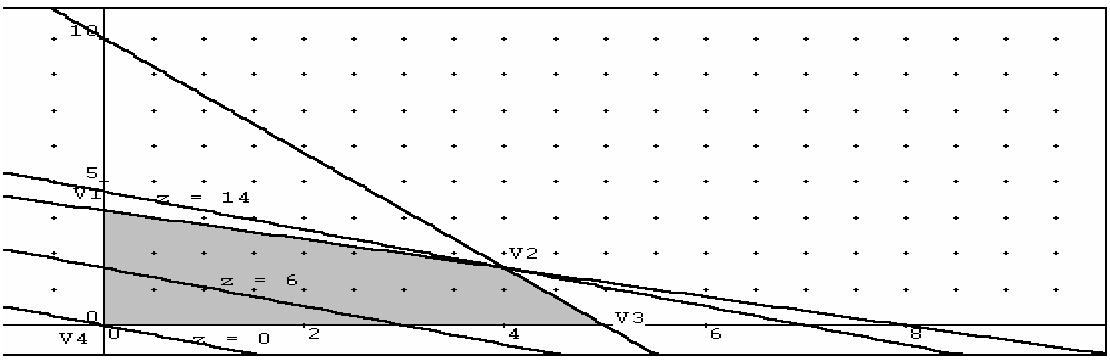
sujeto a $\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 8 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ los vértices son

$$V_1\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 = (0;4)$$

$$V_2\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow V_2 = (4;2)$$

$$V_3\begin{cases} 2x + y = 10 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow V_3 = (5;0)$$

$$V_4\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow V_4 = (0;0)$$



Rectas de Nivel:

Llamamos rectas de nivel asociadas a la función objetivo z a las rectas de ecuación $z = k$, es decir de la forma $ax + by = k$. En el ejemplo, éstas serán rectas de la forma $2x + 3y = k$.

Las rectas de nivel que nos interesan son las que atraviesan la región factible. Vemos que, gráficamente, el máximo valor de z se obtiene a medida que las rectas de nivel se desplazan hacia arriba.

Podemos buscar algebraicamente el $z_{máx}$, reemplazando las coordenadas de los vértices en la función objetivo $z = 2x + 3y$:

$$V_1 = (0;4) \Rightarrow z_1 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

$$\boxed{V_2 = (4;2) \Rightarrow z_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14 = z_{max}}$$

$$V_3 = (5;0) \Rightarrow z_3 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 10$$

$$V_4 = (0;0) \Rightarrow z_4 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

Diremos que la solución óptima es $S = (4;2)$, pues para ese vértice, z es máximo.

Soluciones Óptimas Alternativas

Hemos dicho que la solución óptima de un problema de PL se encuentra siempre en un punto extremo o vértice de la región factible. Existe la posibilidad de más de una solución óptima. En ese caso diremos que el problema tiene soluciones óptimas alternativas.

☞ Resuelve el siguiente problema de PL para comprobar lo dicho:

Maximizar $z = 20x_1 + 15x_2$ sujeto a $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 60 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 60 \\ x_1 \le 10 \\ x_2 \le 12 \end{cases}$ con x_1 y x_2 no negativas.

Ausencia de Solución Factible

A veces sucede que no existen puntos que cumplan simultáneamente todas las restricciones. Esto significa que no hay región factible, o mejor dicho, el conjunto de soluciones o zona factible es vacío.

☞ Puedes verificarlo en el siguiente ejemplo.

Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$

sujeto a $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 6x_1 + 4x_2 \ge 24 \end{cases}$ con todas las variables no negativas.

Soluciones No acotadas

☞ Supongamos que se desea resolver el siguiente problema:

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$ sujeto a $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \end{cases}$ con todas las variables no negativas.

En este caso, la función objetivo z puede ser llevada hacia fuera tanto como se desee. Se dice que el problema tiene "solución no acotada".

<u>Solución del problema inicial</u>: (alimentos A y B y nutrientes M y N)

$$\text{Minimizar } z = 200 \cdot x + 100 \cdot y \quad \Big\}\text{función objetivo}$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} 300 \cdot x + 100 \cdot y \geq 30000 \\ 4 \cdot x + 8 \cdot y \geq 800 \end{cases} \text{restricciones}$$

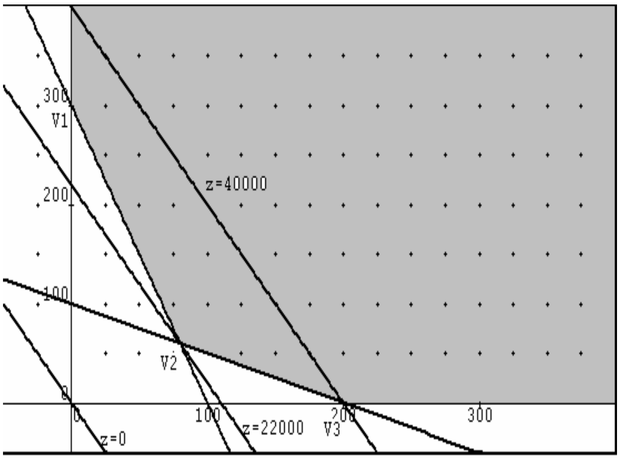
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{condiciones de no negatividad}$$

Los vértices del la región factible son:

$$V_1 = (0;300) \Rightarrow z_1 = 200 \cdot 0 + 100 \cdot 300 = 30000$$

$$\boxed{V_2 = (80;60) \Rightarrow z_2 = 200 \cdot 80 + 100 \cdot 60 = 22000 = z_{mín}}$$

$$V_3 = (200;0) \Rightarrow z_3 = 200 \cdot 200 + 100 \cdot 0 = 40000$$



La solución óptima para que la inversión sea mínima y se cumplan con los requerimientos de los nutrientes M y N, es comprar 80 paquetes del alimento A y 60 del alimento B. Dicha inversión será de $22000.