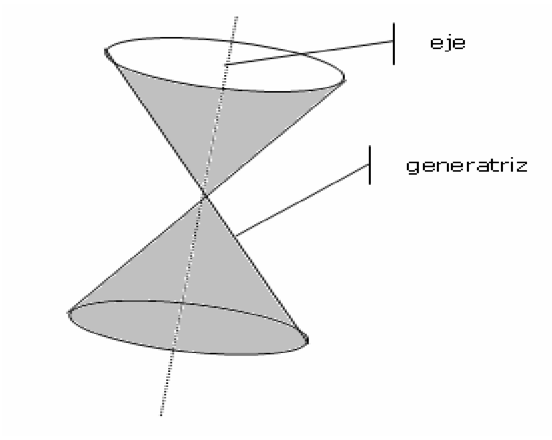
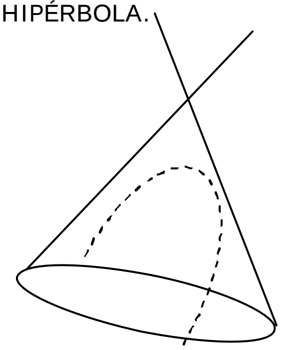
CÓNICAS

Introducción

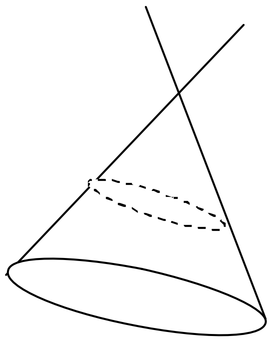
Consideremos un cono circular recto de vértice V tal como el de la figura:



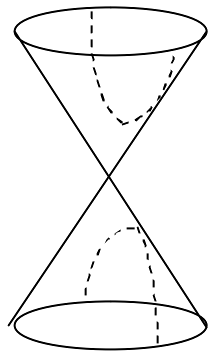
De la intersección de tal superficie y un plano que no pase por el vértice V, resultan diferentes curvas llamadas <u>secciones cónicas</u> o simplemente <u>cónicas</u>. Ellas son: la PARÁBOLA, la ELIPSE y la HIPÉRBOLA.



Parábola



Elipse

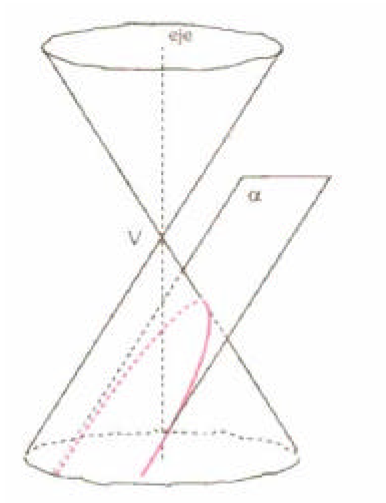


Hipérbola

LA PARÁBOLA

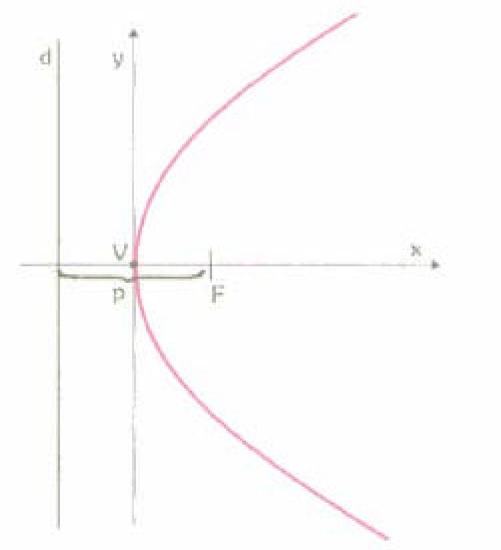
Es la cónica que se obtiene cortando una superficie cónica circular con un plano paralelo a una generatriz que no pasa por el vértice.

Si el plano considerado es el plano afín y métrico IR^2, dotado de una referencia $R = \left(o\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, podemos definir la parábola de la siguiente manera:



Parábola es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo **F** llamado **foco** y una recta fija **d**, llamada **directriz**.

Definimos en primer lugar los **elementos de una parábola**, para hallar luego su ecuación.



F : foco

d : directriz

V : vértice

VF : eje de la parábola o eje focal

p(parámetro): distancia del foco a la directriz

Ecuación de la Parábola

Consideremos el caso de una parábola cuyo vértice V coincide con el origen o = (0;0) de la referencia y cuyo eje focal coincide con el eje de abscisas.

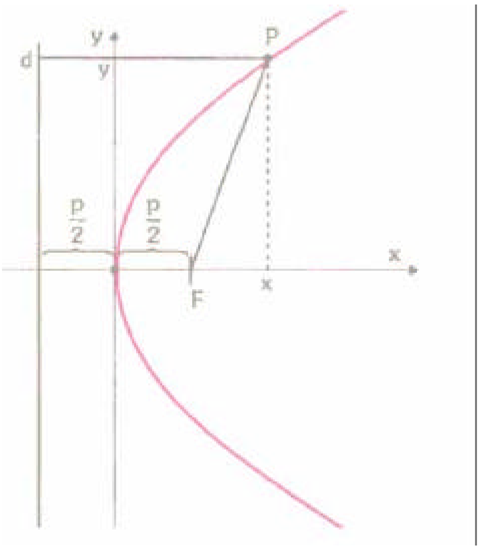
$V = (0\ ;\ 0)$

$P = (x\ ;\ y)$

$Q = \left(-\frac{p}{2}\ ; y\right)$

$F = \left(\frac{p}{2}\ ;0\right)$

Ecuación de la directriz: $x = -\frac{p}{2}$



De acuerdo con la definición, cualquier punto P que pertenezca a la parábola cumplirá la condición:

$$d(P; F) = d(P; d)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

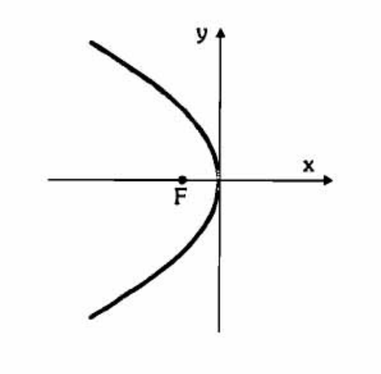
$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow -p \cdot x + y^2 = p \cdot x$$

$\Rightarrow \boxed{y^2 = 2 \cdot p \cdot x}$ Ecuación de la parábola con vértice en o = (0 ; 0) y eje focal coincidente con ele eje de abscisas.

Observación:

Esta parábola tiene sus ramas dirigidas hacia el semieje positivo de las "x". Si sus ramas están dirigidas hacia el semieje negativo de las "x", entonces su ecuación será $y^2 = -2 \cdot p \cdot x$, siendo:



$$F = \left(-\frac{p}{2} ; 0 \right)$$

$d:\ x = \frac{p}{2}$ la ecuación de la directriz.

Si la parábola tiene su vértice desplazado respecto del origen, y su eje es paralelo al eje de abscisas, su ecuación es $(y - y_o)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_o)$. En efecto, si:

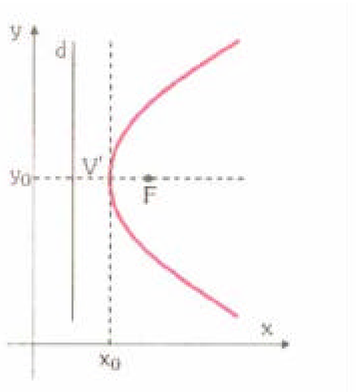
$V = (x_o ; y_o)$

$P = (x ; y)$

$F = \left(x_o + \frac{p}{2} : y_o \right)$

$d : x = x_o - \frac{p}{2}$

$Q = \left(x_o - \frac{p}{2} ; y \right)$



Según la definición:

$$d(P; F) = d(P; d) = d(P; Q)$$

$$\sqrt{\left[x - \left(x_o + \frac{p}{2} \right) \right]^2 + (y - y_o)^2} = \sqrt{\left[x - \left(x_o - \frac{p}{2} \right) \right]^2}$$

$$x^2 - 2x \cdot \left(x_o + \frac{p}{2} \right) + \left(x_o + \frac{p}{2} \right)^2 + (y - y_o)^2 = x^2 - 2x \cdot \left(x_o - \frac{p}{2} \right) + \left(x_o - \frac{p}{2} \right)^2$$

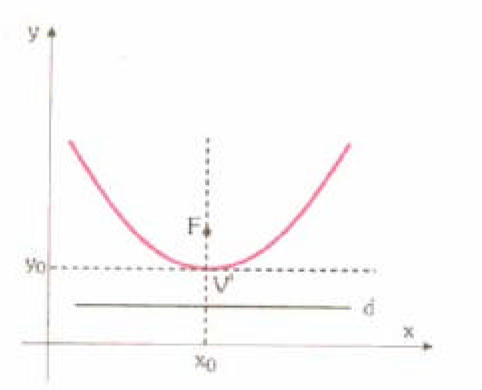
$$x^2 - 2xx_o - 2x\frac{p}{2} + x_o^2 + 2x_o\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2} \right)^2 + (y - y_o)^2 = x^2 - 2xx_o + 2x\frac{p}{2} + x_o^2 - 2x_o\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2} \right)^2$$

$$-px + px_o + (y - y_o)^2 = px - px_o$$

$$(y - y_o)^2 = 2px - 2px_o$$

$$\boxed{(y - y_o)^2 = 2p \cdot (x - x_o)}$$

Análogamente, se puede deducir la ecuación de una parábola de vértice $V = (x_o ; y_o)$, desplazado respecto del origen de la referencia, con eje focal paralelo al eje de ordenadas.



$V = (x_o ; y_o)$

$F = \left(x_o ; y_o + \frac{p}{2}\right)$

$P = (x\ ;\ y)$

$Q = \left(x ; y_o - \frac{p}{2}\right)$

$d : y = y_o - \frac{p}{2}$

$$\boxed{(x - x_o)^2 = 2p \cdot (y - y_o)}$$

Nota: Nótese que haciendo $2p = \frac{1}{a}$, obtenemos la forma canónica de la función cuadrática:

$$(x - x_o)^2 = \frac{1}{a} \cdot (y - y_o) \quad \Rightarrow \quad a \cdot (x - x_o)^2 = y - y_o \quad \Rightarrow \quad y = a \cdot (x - x_o)^2 + y_o$$

Ejemplo:

Encuentra los elementos (foco, vértice, directriz, parámetro p y eje focal) de la parábola de ecuación $y^2 - 4y - 6x + 10 = 0$ y represéntala gráficamente.

Completando cuadrados, tendremos que:

$y^2 - 4y + 4 - 4 = 6x - 10$

$(y - 2)^2 = 6x - 6$

$\boxed{(y - 2)^2 = 6 \cdot (x - 1)}$

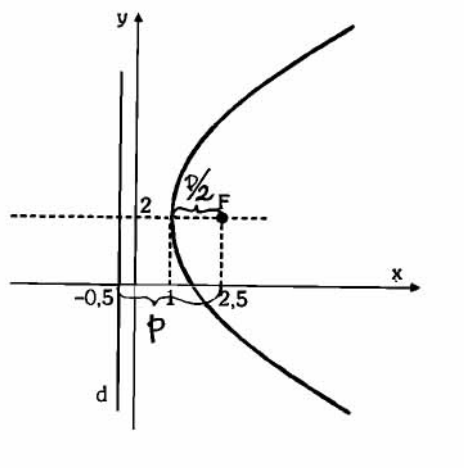
V = (1 ; 2)

$2p = 6 \Rightarrow p = 3 \Rightarrow \frac{p}{2} = 1{,}5$

F = (2,5 ; 2)

Eje focal: y = 2

Directriz: x = –0,5



Una observación importante:

Si tomamos como parámetro **p** a la distancia entre el foco y el vértice o, lo que es lo mismo, a la distancia entre el vértice y la directriz, tendremos que considerar a la distancia entre el foco y la directriz como **2p**. Esto es una convención, que hará que la ecuación $\boxed{y^2 = 2 \cdot p \cdot x}$ de una parábola con vértice en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje de abscisas se transforme en $\boxed{y^2 = 4 \cdot p \cdot x}$.

En efecto, debemos considerar ahora las siguientes coordenadas para su demostración:

P(x ; y) ; F = (p ; 0) y la ecuación de la directriz será d : x = –p.

Aplicando la definición:

$$d(P;F) = d(P;d)$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\boxed{y^2 = 4px}$$

De modo que las demás ecuaciones, se transformarán en:

$$\boxed{(y - y_o)^2 = 4p \cdot (x - x_o)}$$

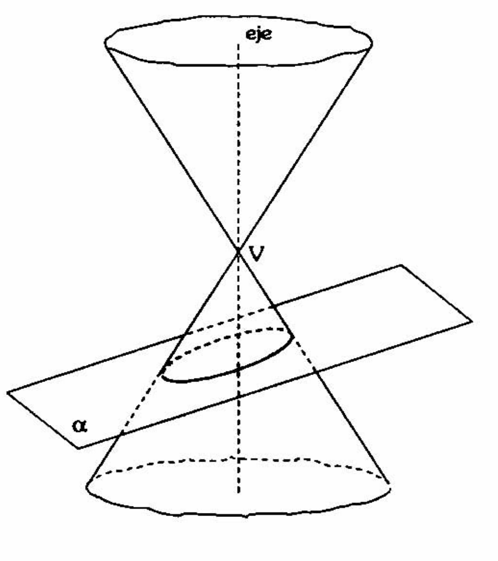
$$\boxed{(x - x_o)^2 = 4p \cdot (y - y_o)}$$

En el ejemplo dado, será entonces **$6 = 4p \Rightarrow p = 1{,}5$**, con lo cual obtendremos las mismas coordenadas para el foco **$F = (2{,}5\ ;\ 2)$** y la misma ecuación para la directriz d : **$x = -0{,}5$**

LA ELIPSE

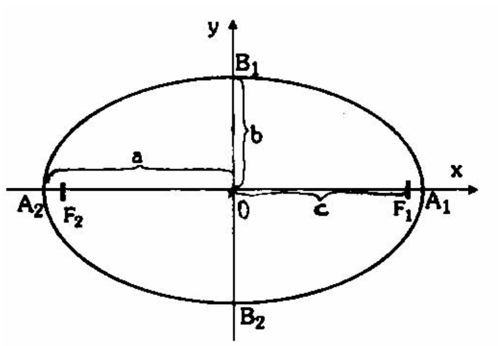
Es la cónica que se obtiene cortando una superficie cónica circular con un plano que no pasa por su vértice y que corta a todas las generatrices. (Si el plano es perpendicular al eje de la superficie cónica, resulta la circunferencia como un caso particular de la elipse)

Podemos definir también a la elipse de la siguiente manera:



Elipse es el conjunto de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante.

Elementos de la Elipse



Focos: F_1 y F_2 ; distancia focal: 2c

Centro: O, punto medio de $\mathbf{F_1F_2}$

Vértices: A_1; A_2; B_1; B_2

Eje Mayor: $2a = d(A_1; A_2)$

Eje Menor: $2b = d(B_1; B_2)$

Como para cualquier punto P de la elipse se verifica que la suma de sus distancias a los focos es constante, entonces por pertenecer A_1 a la elipse, se tiene que:

$$d(P; F_1) + d(P; F_2) = d(A_1; F_1) + d(A_1; F_2)$$

pero $\quad d(A_1; F_1) = d(A_2; F_2)$

entonces $\quad d(P; F_1) + d(P; F_2) = d(A_1; F_2) + d(A_2; F_2)$

es decir que $\quad d(P; F_1) + d(P; F_2) = d(A_1; A_2) = 2a$

Esto significa que el valor de dicha constante es **2a**. Podemos decir entonces que un punto cualquiera <u>P pertenece a la elipse</u> si y sólo si $\boxed{d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a}$

Por otra parte, como B_1 pertenece a la elipse, se verifica que

$$d(B_1; F_1) + d(B_1; F_2) = 2a$$

pero $\quad d(B_1; F_1) = d(B_1; F_2)$

entonces $\quad 2 \cdot d(B_1; F_1) = 2a$

o sea $\quad d(B_1; F_1) = a$

y como B_1OF_1 es un triángulo rectángulo en O entonces $a^2 = b^2 + c^2$

Es decir que **a** es la hipotenusa y **b** y **c** son los catetos,

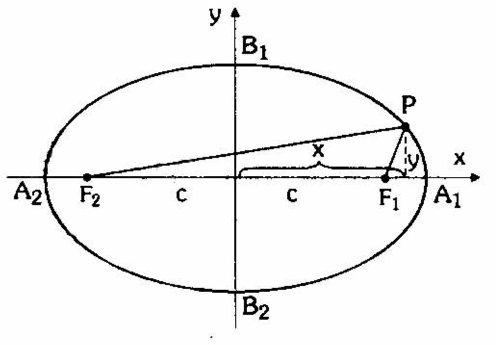
por lo tanto $a > c$

es decir que $\frac{c}{a} < 1$

El cociente $\frac{c}{a}$ se llama **excentricidad** de la elipse y se denota con **e**. En símbolos $e = \frac{c}{a}$

Ecuación de la Elipse

Consideremos la referencia $R = (o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ en el plano afín y métrico IR^2 y en ella, una elipse de semiejes **a** y **b**, con centro en el origen o = (0 ; 0) de la referencia y focos sobre el eje de abscisas.



Se tienen las coordenadas:

$P = (x\ ;\ y)$

$F_1 = (c;0)$

$F_2 = (-c;0)$

Aplicando la definición: $d(P;F_1) + d(P;F_2) = 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y operando,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc = 4 \cdot (a^2 - cx)$$

Elevando nuevamente ambos miembros al cuadrado y operando,

$$a^2 \cdot \left[(x-c)^2 + y^2\right] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2 \cdot (x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$a^2y^2 + x^2 \cdot (a^2 - c^2) = a^2 \cdot (a^2 - c^2)$$

pero como $a^2 - c^2 = b^2$

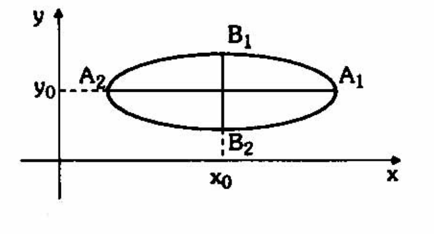
se tiene que $a^2y^2 + x^2b^2 = a^2b^2$

y dividiendo ambos miembros por a^2b^2

resulta $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

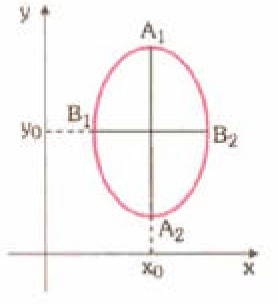
Si el centro de la elipse es un punto cualquiera C = $(x_o ; y_o)$ y el eje mayor es paralelo al eje "x", entonces su ecuación es:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$



Si el centro de la elipse es C = $(x_o ; y_o)$ y el eje mayor es paralelo al eje "y", entonces su ecuación es:

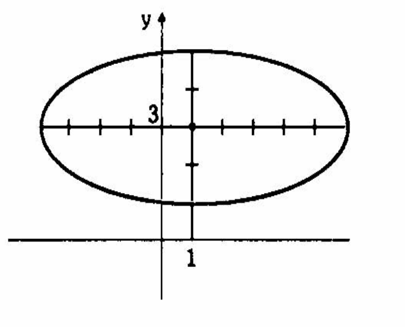
$$\frac{(y - y_o)^2}{a^2} + \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1$$



Ejemplos:

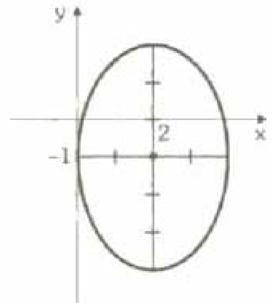
1) La ecuación de la elipse con centro en C = (1 ; 3) y semiejes a = 5 y b = 2, con eje mayor paralelo al eje "x" es:

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1$$

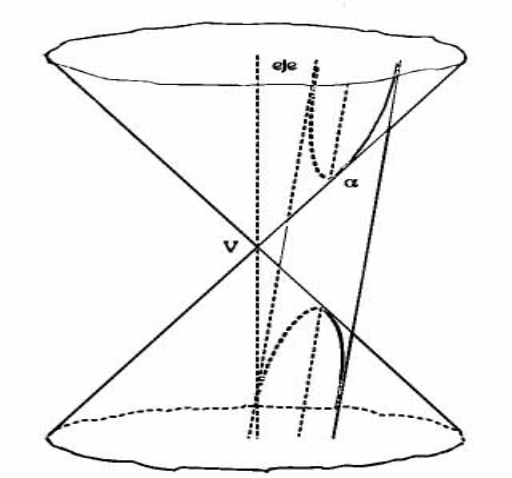


2) La ecuación de la elipse con centro en C = (2 ;–1) y semiejes a = 3 y b = 2, con eje mayor paralelo al eje "y" es:

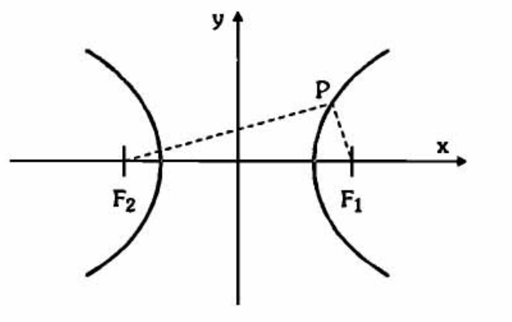
$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$



LA HIPÉRBOLA

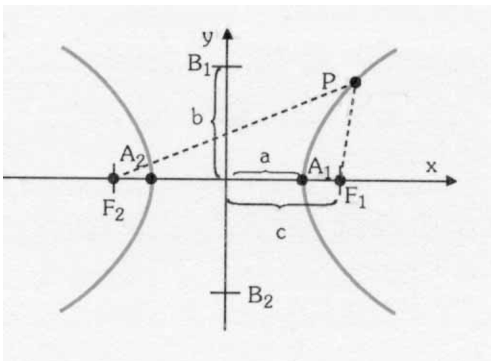


Es la cónica que se obtiene cortando una superficie cónica circular con un plano que no pasa por su vértice y es paralelo al plano determinado por dos generatrices.



Podemos definir también a la hipérbola de la siguiente manera:
Hipérbola es el conjunto de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos es un valor constante.

Elementos de Hipérbola – Ecuación



Focos: F_1 y F_2 ; distancia focal: 2c
Centro: O, punto medio de $\mathbf{F_1F_2}$
Vértices: A_1 y A_2
Eje Real: $2a = d(A_1; A_2)$
Eje Imaginario: $2b = d(B_1; B_2)$
Puede verificarse la siguiente relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Como ahora a < c, resulta entonces que la excentricidad **e** de la hipérbola es mayor que 1.

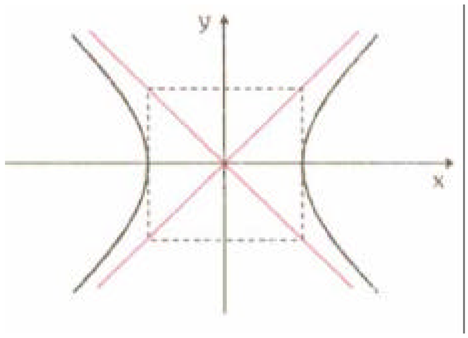
$$e = \frac{c}{a} > 1$$

De manera análoga al procedimiento hecho para la elipse y teniendo en cuenta la definición:

$$\left| d(P; F_1) - d(P; F_2) \right| = 2a$$

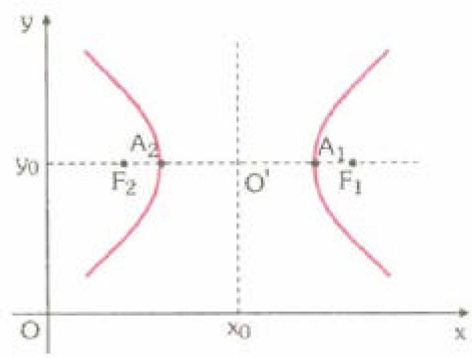
se puede verificar, procediendo algebraicamente, que la ecuación de una hipérbola con centro en o = (0 ; 0) y eje real sobre el eje "x" es $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Las ramas de dicha hipérbola se acercan indefinidamente a las rectas de ecuaciones $\boxed{y = \frac{b}{a}x}$ e $\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$, llamadas **asíntotas** de la hipérbola.



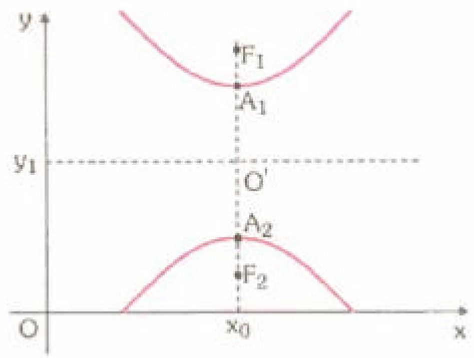
Si el centro de la hipérbola es un punto C = $(x_o ; y_o)$ y su eje real paralelo al eje "x", su ecuación es

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$



Si el centro de la hipérbola es un punto C = $(x_o ; y_o)$ y su eje real paralelo al eje "y", su ecuación es

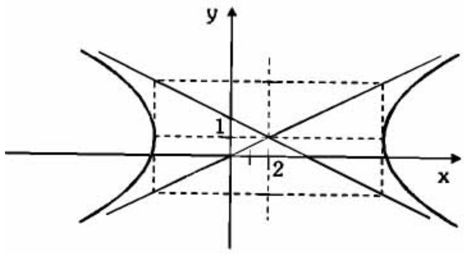
$$\frac{(y - y_o)^2}{a^2} - \frac{(x - x_o)^2}{b^2} = 1$$



Ejemplos:

1) La ecuación de la hipérbola con centro en C = (2 ; 1), semiejes a = 6, b = 3 y eje real paralelo al eje "x" es

$$\frac{(x - 2)^2}{36} - \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$$



2) La ecuación de la hipérbola con centro en C = (–3 ; 2), semiejes a = 5, b = 1 y eje real paralelo al eje "y" es

$$\frac{(y-2)^2}{25} - (x+3)^2 = 1$$