

**ANÁLISIS COMBINATORIO**

Considerando los elementos de un conjunto, se trata de saber, cuales y cuántos son los distintos ordenamientos o agrupaciones que se pueden obtener con los elementos del conjunto, de manera tal que todos y cada uno de ellos (ordenamiento o agrupaciones) tenga el mismo número de componentes.

Interesa además, saber calcular su número sin necesidad de formarlos y contarlos.

Para resolver el problema fundamental del análisis combinatorio se prescinde de la naturaleza de los elementos, pero no de su ordenamiento, pues en algunos casos resulta imprescindible.

En combinatoria se utilizan y definen “tres” formas o métodos de obtener los distintos ordenamientos o agrupaciones; cada uno de los cuales posee características propias, que surgen de las condiciones impuestas en la definición.

Estos tres métodos o formas de agrupaciones son: “**variaciones**”, “**permutaciones**” y “**combinaciones**”, las cuales a su vez cada una de ellas pueden ser: “**simples**” o “**con repetición**”.

**ANÁLISIS COMBINATORIO SIMPLE**

**1. VARIACIONES, ARREGLOS O DISPOSICIONES**

Dados “m” objetos a, b, c,……, h, k, l, llámese **variaciones, arreglos o disposiciones** de los “m” objetos tomándolos de a “n”, o tomados de “n” en “n” o n-arios (siendo n=m), a los grupos de objetos que se pueden formar de modo que:

- 1) En cada grupo entran “n” de los “m” objetos.
- 2) Dos grupos se consideran distintos cuando difieren, o bien en alguno de los objetos, o bien en el orden que van colocados.

Si son “m” los elementos y “n” el número de orden (número de elementos de cada grupo) las variaciones las simbolizaremos:  $V_{m,n}$  o  $V_m^n$ . (Otras notaciones utilizadas son  $A_{m,n}$  o  $A_m^n$  o bien  $D_{m,n}$  o  $D_m^n$ )

Por ejemplo, dados los elementos **a, b, c, d**, donde  $m = 4$ , se tienen:

Variaciones Monarias: grupos tomados de a 1 elemento, es decir  $V_{4,1}$ . Ellas son:

(1) a b c d 4 grupos distintos

Variaciones Binarias: grupos tomados de a 2 elementos, es decir  $V_{4,2}$ . Ellas son:

(2) ab ac ad  
 ba bc bd  
 ca cb cd  
 da db dc  
 12 grupos distintos

Variaciones Ternarias: Si se toman los grupos de 3 en 3, es decir  $V_{4,3}$ . Ellas son:

(3) abc abd acb acd adb adc  
 bac bad bca bcd bda bdc  
 cab cad cba cbd cda cdb  
 dab dac dba dbc dca dcb  
 24 grupos distintos

Finalmente, si se toman grupos de 4 en 4, tendremos

**ANÁLISIS COMBINATORIO**

Variaciones Cuaternarias: es decir  $V_{4,4}$ . Ellas son:

(4)    abcd    abdc    acbd.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 24 grupos distintos

En cada uno de los cuatro cuadros, se observa que cada arreglo es distinto de los demás porque varía el orden o porque posee algún elemento diferente.

**Formación de los arreglos o variaciones**

Dados "m" objetos: a, b, c, d,....., k, l

En primer lugar, los arreglos de a uno, son los elementos mismos:

(1)        a, b, c, d,....., k, l

Para formar los arreglos binarios de los "m" objetos, tomemos cada arreglo de a uno y coloquémosle después cada uno de los restantes objetos. Por el arreglo "a" que figura en (1) se obtiene: ab, ac, ad,.....ah, ak, al, y así también de los demás. En consecuencia todos los arreglos binarios se pueden escribir en un cuadro:

ab, ac, .....ak, al  
 ba, bc, .....bk, bl  
 .....  
 (2) .....  
 ka, kb, .....kh, kl  
 la, lb, .....lh, lk

Para formar los arreglos de a tres, se usa el mismo procedimiento: a partir de cada uno de los arreglos de (2) se le agregan sucesivamente al la derecha todos los objetos que faltan, obteniéndose así todos los arreglos ternarios:

abc, abd, .....abk, abl  
 acb, acd,.....ack, acl  
 .....  
 .....  
 (3) alb, alc, .....alh, alk  
 bac, bad, .....bak, bal  
 .....  
 .....  
 lka, lkb, .....lkh

Y así sucesivamente. Se observa que el proceso es general y se podrán formar los arreglos n-arios.

**ANÁLISIS COMBINATORIO**

**Número de arreglos o variaciones**

En la generalidad de los casos, más que saber cuales son los grupos posibles, interesa saber cuántos son. Para ello se sigue un procedimiento inductivo:

Según (1), el número de arreglos monarios es:  $V_m^1 = m$

En el cuadro (2) se observa que cada arreglo de un elemento se ha combinado con los  $(m - 1)$  elementos restantes en consecuencia:

$$V_m^2 = V_m^1 \cdot (m - 1)$$

$$V_m^2 = m \cdot (m - 1)$$

En el cuadro (3) se observa que cada uno de los arreglos binarios se ha combinado con los  $(m - 2)$  elementos restantes, o sea:

$$V_m^3 = V_m^2 \cdot (m - 2)$$

$$V_m^3 = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2)$$

Si se hubiesen formado los arreglos cuaternarios de igual forma, se vería que:

$$V_m^4 = V_m^3 \cdot (m - 3)$$

$$V_m^4 = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (m - 3)$$

Y así sucesivamente, hasta llegar a:

$$V_m^n = V_m^{n-1} \cdot [m - (n - 1)]$$

$$V_m^n = V_m^{n-1} \cdot (m - n + 1)$$

Se conviene que  $V_m^0 = 1$

Ordenando las variaciones de los sucesivos órdenes y multiplicando miembro a miembro se obtiene:

$$V_m^1 = m$$

$$V_m^2 = V_m^1 \cdot (m - 1)$$

$$V_m^3 = V_m^2 \cdot (m - 2)$$

$$V_m^4 = V_m^3 \cdot (m - 3)$$

.....

.....

$$V_m^{n-1} = V_m^{n-2} \cdot (m - n + 2)$$

$$V_m^n = V_m^{n-1} \cdot (m - n + 1)$$

$$V_m^n = \underbrace{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - n + 1)}_{n \text{ factores}}$$

O sea que el número de arreglos de "m" elementos de orden "n" es igual al producto de n factores decrecientes a partir de "m".

## 2. PERMUTACIONES

### Formación de las permutaciones

Se llaman **permutaciones de m objetos** a las variaciones de orden m de esos mismos objetos. Como en cada permutación intervienen los m objetos, dos permutaciones solo pueden diferir en el orden en que están agrupados sus elementos.

Por ejemplo:

Las permutaciones de las letras A, B, C son: ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA

Donde se observa que en todas figuran las tres letras dispuestas en distinto orden.

### Número de permutaciones

Designando como  $P_m$  al número de permutaciones de m objetos; por definición se tiene que:

$$P_m = V_m^m$$

Basta hacer  $n = m$  en la fórmula de los arreglos, en consecuencia el último factor es:

$$m - m + 1 = 1$$

y como los factores van disminuyendo en una unidad, el penúltimo será 2, el antepenúltimo 3, etc.

En consecuencia:

$$P_m = V_m^m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

### Formas usuales para expresar el número de permutaciones

El producto de los m primeros números naturales distintos de cero se llama "**factorial de m**" y se lo representa por **m!**. En consecuencia, la fórmula que da el número de permutaciones de m objetos se puede escribir así:

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

## 3. COMBINACIONES

Se llaman **combinaciones "n"-arias** (monarias, binarias, ternarias, etc.) de "m" objetos (con  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $n \leq m$ ), o **combinaciones de m objetos tomados de a n por vez**, a los distintos grupos que se pueden formar de manera tal que:

- 1) En cada grupo entran n de los m objetos.
- 2) Dos grupos se consideran distintos cuando difieren en alguno de los elementos que lo forman.

En las combinaciones solo se tienen en cuenta los objetos que intervienen en ellas y no en el orden en que estén agrupados en las mismas.

### Formación de las combinaciones

Consideremos, por ejemplo, cuatro elementos A, B, C, D, en el orden en que las escribimos. Cada una de esas letras constituye una combinación de primer orden o monaria de los mismos.  $\binom{1}{4}$

**ANÁLISIS COMBINATORIO**

Las combinaciones de segundo orden o binarias se pueden obtener agregando a la derecha de cada una de las de primer orden, cada uno de los objetos que le siguen:

$$AB; AC; AD; BC; BD; CD \quad \left(C_4^2\right)$$

Las combinaciones de tercer orden se obtienen agregando a la derecha de cada una de las de segundo orden cada uno de los objetos dados que siguen al último de los que figuran en ella, entonces:

$$ABC; ABD; ACD; BCD \quad \left(C_4^3\right)$$

Y finalmente las de cuarto orden:

$$ABCD \quad \left(C_4^4\right)$$

**Número de combinaciones**

Si consideramos, por ejemplo, las combinaciones de tercer orden de las letras A, B, C, D y debajo de cada una de ellas expresamos todas las permutaciones que pueden hacerse con sus elementos, obtenemos todos los arreglos de tercer orden de dichas letras:

$C_4^3$				}
ABC	ABD	ACD	BCD	
ACB	ADB	ADC	BDC	
BAC	BAD	CAD	CBD	
BCA	BDA	CDA	CDB	
CAB	DAB	DAC	DBC	
CBA	DBA	DCA	DCB	
				$P_3$

Observando el cuadro anterior, se deduce que:  $V_4^3 = C_4^3 \cdot P_3 = 4 \cdot 6 = 24$

Razonando en forma análoga para el caso de  $C_m^n$ , o sea que formamos todas las  $C_m^n$  y con cada una de ellas formamos todas las permutaciones posibles, o sea  $P_n$  se obtiene en total:

$$C_m^n \cdot P_n = V_m^n$$

de donde resulta:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - n + 1)}{n!}$$

**NÚMERO COMBINATORIO**

El número de combinaciones de "m" objetos tomados de a "n" en "n" se denomina también número combinatorio y se lo simboliza de la siguiente manera:

$$\binom{m}{n} = C_m^n = \frac{V_m^n}{n!}$$

**ANÁLISIS COMBINATORIO**

*Por ejemplo:*

$$\binom{8}{3} = C_8^3 = \frac{V_8^3}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Otra forma de expresarlo es:

$$\binom{m}{n} = \frac{V_m^n}{n!} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!}$$

y multiplicando numerador y denominador por  $(m-n)!$  se tiene:

$$\binom{m}{n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1) \cdot (m-n) \cdot (m-n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n! \cdot (m-n)!}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

**Propiedades de los números combinatorios**

1)

$$\binom{m}{0} = 1$$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = 1$$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!} = 1 \cdot 0!$$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!} = 0! \Rightarrow 0! = 1$$

2)

$$\binom{m}{m} = 1$$

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m! \cdot (m-m)!} = 1$$

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m! \cdot 0!} = 1$$

**3) Números combinatorios complementarios**

Definición: Dos combinaciones del mismo número de objetos son complementarias cuando la suma de sus órdenes es igual al número de objetos:

$$\binom{m}{n} \text{ y } \binom{m}{m-n} \text{ son complementarios ya que } n + m - n = m$$

Propiedad: los números combinatorios complementarios son iguales.

**ANÁLISIS COMBINATORIO**

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)![m-(m-n)]}$$

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

- 4) La suma de dos números combinatorios de igual base (número de objetos), y de órdenes consecutivas (n-1 y n) da por resultado el número combinatorio de orden n y base inmediatamente superior.

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$$

$$\frac{(m-1)!}{(n-1)![(m-1)-(n-1)]!} + \frac{(m-1)!}{n!(m-1-n)!} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} + \frac{(m-1)!(m-n)}{n \cdot (n-1)!(m-n)!} =$$

$$\frac{(m-1)!(n+m-n)}{n \cdot (n-1)!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

$$m! = m \cdot (m-1)! \Rightarrow (m-n)! = (m-n-1)!(m-n)$$

$$(m-n-1)! = \frac{(m-n)!}{m-n}$$

**Triángulo de Tartaglia**

Considerando que  $C_m^1 = m$  y  $C_m^0 = 1$  y que  $0! = 1$ , para un valor dado de m, dicho triángulo permite calcular con facilidad todas las  $C_m^n$ . Procedemos así:

En una primera fila se colocan:  $C_1^0 = C_1^1 = 1$ , en una segunda fila  $C_2^0, C_2^1, C_2^2$ , en una tercer fila  $C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3$ , hasta que en una enésima fila se colocan  $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ . Se obtiene un triángulo aritmético llamado triángulo de Tartaglia, en el que cada término es la suma de los dos más cercanos de la fila anterior:

				1		1										
			1		2		1									
		1		3		3		1								
		1	4		6		4		1							
	1		5		10		10		5		1					
	1	6		15		20		15		6		1				
	1	7		21		35		35		21		7		1		
1		8		28		56		70		56		28		8		1
.....																
.....																
.....																

**ANÁLISIS COMBINATORIO**

**Generalización de los números combinatorios**

La máxima generalización conveniente la constituye el símbolo  $\binom{V}{n}$ , definido por:

$$(I) \quad \begin{cases} \binom{V}{n} = \frac{V(V-1) \cdot (V-2) \cdot \dots \cdot (V-n+1)}{n!} & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ \binom{V}{0} = 1 \end{cases} \quad \text{siendo } V \in \mathbb{R}$$

**Por ejemplo:**

$$\binom{2/5}{4} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - 2\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - 3\right)}{4!} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) \cdot \left(-\frac{13}{5}\right)}{24} = -\frac{624}{625} \cdot \frac{1}{24} = -\frac{26}{625}$$

$$\binom{\pi}{3} = \frac{\pi \cdot (\pi - 1) \cdot (\pi - 2)}{3!} \cong \frac{3,14 \cdot 2,14 \cdot 1,14}{6} \cong 1,276724$$

$$\binom{-\pi}{3} \cong \frac{(-3,14) \cdot (-4,14) \cdot (-5,14)}{6} \cong -11,136324$$

El símbolo  $\binom{V}{n}$  se lee "V sobre n" como si fuera una fracción, y el conjunto de los  $\binom{V}{n}$  se llaman coeficientes binomiales. Para  $V = m$  entero y positivo,  $\binom{m}{n}$  coincide con el número combinatorio  $C_m^n$ .

De las propiedades anteriormente expresadas, la tercera (números combinatorios complementarios), deja de tener sentido para  $\binom{V}{m}$ , pero las otras valen con toda generalidad.

Obsérvese que también la (I) define  $\binom{m}{n}$ , siendo  $m$  y  $n$  naturales tales que  $n > m$ , pero en tal caso,  $\binom{m}{n} = 0$  pues en el numerador aparece el factor  $(m - m) = 0$ .

**Por ejemplo:**

$$\binom{3}{6} = \frac{3 \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 2) \cdot (3 - 3) \cdot (3 - 4) \cdot (3 - 5)}{6!} = 0$$

**ANÁLISIS COMBINATORIO CON REPETICIÓN**

Hasta ahora hemos supuesto que en cada variación (arreglo), permutación o combinación, los objetos que intervienen son todos distintos entre sí. Si se omite esa suposición, se tendrán las variaciones, permutaciones o combinaciones con repetición.

**1. VARIACIONES CON REPETICIÓN**

Las variaciones o arreglos de  $m$  objetos,  $n$ -arios (monarios, binarios, etc.), concuerda con la definición dada anteriormente para los arreglos simples sin más que agregar a la condición la cláusula: "no necesariamente distintos" (los objetos).

**Formación y número de variaciones o arreglos con repetición**

*Por ejemplo:* los arreglos binarios con repetición de cinco objetos  $a, b, c, d, e$  son:

aa	ab	ac	ad	ae	
ba	bb	bc	bd	be	
ca	cb	cc	cd	ce	$V'_{5,2}$
da	db	dc	dd	de	
ea	eb	ec	ed	ee	

En este ejemplo se aprecia como se forman los arreglos binarios a partir de los monarios (que no son sino los objetos mismos  $a, b, c, d, e$ ), agregando a continuación de cada uno de estos, sucesivamente todos los objetos.

O sea que si llamamos:

$$V'_{m,n}$$

$$V'_{m,1} = m$$

$$V'_{m,2} = V'_{m,1} \cdot m$$

De igual manera, a partir de los arreglos binarios se forman los ternarios agregando sucesivamente todos los objetos a continuación de cada uno de los binarios. En consecuencia, el número de arreglos binarios se ve multiplicado por  $m$ . Este es un procedimiento general que nos permite concluir diciendo que los arreglos  $n$ -arios de  $m$  objetos con repetición, es igual al de orden  $(n - 1)$  multiplicado por  $m$ .

O sea:

$$V'_{m,n} = V'_{m,n-1} \cdot m$$

y si se conviene que

$$V'_{m,0} = 1$$

Podemos deducir que

$$V'_{m,1} = m$$

$$V'_{m,2} = V'_{m,1} \cdot m = m \cdot m = m^2$$

$$V'_{m,3} = V'_{m,2} \cdot m = m^2 \cdot m = m^3$$

.....

.....

$$V'_{m,n} = \underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n \text{ veces}} = m^n$$

Como se observa, no hay inconveniente en que  $n > m$ .

**ANÁLISIS COMBINATORIO**

**2. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN**

Son las variaciones o arreglos m-arios de los m objetos. En consecuencia:

$$P'_m = V'_{m,m}$$

**Por ejemplo:**

Si permutamos los objetos 1, 2, 3:

111 112 113 121 122 123 131 132 133  
211 212 213 221 222 223 231 232 233  
311 312 313 321 322 323 331 332 333

**Permutaciones con grupos de elementos iguales**

Estos grupos presentan similitud con las permutaciones con repetición, pero no deben confundirse.

Sean dados un grupo "p" de elementos iguales; otro grupo "q" de elementos iguales entre sí, pero distinto de los anteriores; otro grupo "r" de elementos iguales entre sí y distinto de los anteriores; etc. Y, finalmente, otro grupo de "t" de elementos iguales entre sí y distinto de todos los demás grupos.

El número total de elementos u objetos es  $n = p + q + r + \dots + t$ .

Se llaman *permutaciones de los n elementos, de clase (p, q, r, .....t)* a las agrupaciones de los n objetos que difieran en la colocación u orden en que van dispuestos.

Su número será:

$$\left\{ \begin{array}{l} P'_n{}^{p,q,r,\dots,t} = \frac{n!}{p!q!r!\dots t!} \\ p + q + r + \dots + t = n \end{array} \right.$$

**3. COMBINACIONES CON REPETICIÓN**

Las *combinaciones con repetición de m objetos tomándolos de "n" en "n"*, o sea, n-arias, se definen como las combinaciones simples, sin más que agregar a la definición la cláusula de que los n objetos que forman cada combinación no son necesariamente distintos.

Dados m objetos, si deseamos formar combinaciones simples, éstas solamente pueden ser de órdenes 1, 2, 3, ..... , m. En cambio, si formamos combinaciones con repetición, éstas podrán ser de cualquier orden, por grande que sea.

**Por ejemplo:**

Con los objetos **a, b, c** se pueden formar *binarias*: aa ab ac bb bc cc  $C'_{3,2} = C^2_{3+2-1} = C^2_4$ .

*Ternarias*: aaa aab aac abb abc acc bbb bbc bcc ccc  $C'_{3,3} = C^3_{3+3-1} = C^3_5$

*Cuaternarias*: aaaa aabb aacc abbb abcc accc bbbb bbcc bccc cccc aaab aabc abbc bbcc aaac  $C'_{3,4} = C^4_{3+4-1} = C^4_6$

En general: 
$$C'_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$$

**PRODUCTO DE FACTORES BINOMIALES CON UN TÉRMINO COMÚN**

$$(x + a) (x + b) = x^2 + (a+b) x + ab$$

$$(x + a) (x + b) (x + c) = [x^2 + (a+b) x + ab] (x + c) \\ = x^3 + (a+b+c) x^2 + (ab+ac+bc) x + abc$$

$$(x + a) (x + b) (x + c) (x + d) = [x^3 + (a + b + c) x^2 + (ab + ac + bc) x + abc] (x + d) = \\ = x^4 + x^3d + (a + b + c) x^3 + x^2(a + b + c) d + x^2(ab + ac + bc) + x (ab + ac + bc) d + x abc + abcd = \\ x^4 + x^3 (a + b + c + d) + x^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + (abc + abd + acd + bcd) x + abcd \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots$$

**En general:**  $(x + a) \cdot (x + b) \cdot (x + c) \dots\dots\dots (x + i) \cdot (x + j) \cdot (x + k) =$   
 $x^n + x^{n-1}(a + b + c + \dots\dots\dots + i + j + k) + x^{n-2}(ab + ac + \dots\dots\dots + jk) + x^{n-3}(abc + \dots\dots\dots + ijk) +$   
 $+ x (abc\dots\dots ij + \dots\dots + bc\dots\dots jk) + abc\dots\dots ijk$

**BINOMIO DE NEWTON**

$$(x + a)^n = \overbrace{(x + a) \cdot (x + a) \cdot \dots\dots\dots \cdot (x + a)}^n$$

$$(x + a)^n = x^n + x^{n-1}(a + a + \dots + a) + x^{n-2}(aa + aa + \dots + aa) + \\ + x^{n-3}(aaa + aaa + \dots + aaa) + \dots + x \left( \underbrace{aa\dots a}_{n-1} + \dots + \underbrace{aa\dots a}_{n-1} \right) + \underbrace{aaa\dots a}_n$$

A continuación se calcula cada uno de los coeficientes de las "x":

El coeficiente de  $x^{n-1}$  es  $(a + a + \dots + a) = n \cdot a$

El coeficiente de  $x^{n-2}$  es  $(aa + aa + \dots + aa) = (a^2 + a^2 + \dots + a^2)$

Cada término es  $a^2$  y el número de esos términos es el número de combinaciones de n elementos

"a" tomados de dos en dos, es decir  $\binom{n}{2}$  términos iguales a  $a^2$ , o sea:

$$(aa + aa + \dots + aa) = \underbrace{(a^2 + a^2 + \dots + a^2)}_{\binom{n}{2}} = \binom{n}{2} \cdot a^2$$

El coeficiente de  $x^{n-3}$  es  $(aaa + aaa + \dots + aaa) = (a^3 + a^3 + \dots + a^3)$ , cada término es  $a^3$  y el número de esos términos es el número de combinaciones de los n elementos "a" tomados de 3 en

3, es decir  $\binom{n}{3}$  términos iguales a  $a^3$ , o sea:

$$(aaa + aaa + \dots + aaa) = \underbrace{(a^3 + a^3 + \dots + a^3)}_{\binom{n}{3}} = \binom{n}{3} \cdot a^3$$

Análogamente,

El coeficiente de  $x$  es  $\left( \underbrace{aa\dots a}_{n-1} + \dots + \underbrace{aa\dots a}_{n-1} \right)$ , donde cada término es igual a  $a^{n-1}$ . El número de esos términos es el número de combinaciones de  $n$  elementos "a" tomados de  $(n-1)$  en  $(n-1)$ , es decir  $\binom{n}{n-1}$  términos iguales a  $a^{n-1}$ , o sea:

$$\left( \underbrace{aa\dots a}_{n-1} + \dots + \underbrace{aa\dots a}_{n-1} \right) = \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1}}_{\binom{n}{n-1}} = \binom{n}{n-1} \cdot a^{n-1}$$

El último término es  $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$

Luego, reemplazando los coeficientes por los valores calculados, se obtiene:

$$(x + a)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot a + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot a^3 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x \cdot a^{n-1} + a^n$$

que es la expresión de la llamada **regla de Newton**, la cual también puede escribirse así:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot a + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot a^2 + \dots + \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot a^k + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x \cdot a^{n-1} + \binom{n}{n} a^n$$

O también, en general:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

### Algunas observaciones

- 1) El desarrollo de la potencia  $n$ -sima de un binomio tiene  **$n+1$**  términos, según lo indica la variación de  **$k$** , desde  **$0$**  hasta  **$n$** .
- 2) Se puede demostrar que el término de lugar  **$h$**  en el desarrollo es:

$$T_h = \binom{n}{h-1} \cdot a^{n-(h-1)} \cdot b^{h-1}$$