FUNCIONES LINEALES

1) Determina cuáles de las siguientes funciones son lineales. Los espacios vectoriales considerados son todos sobre el cuerpo de los números reales.

a) $f : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^3$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$ Rta.: sí

b) $f : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$ Rta.: no

c) $f : \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^2$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y - z \end{pmatrix}$ Rta.: sí

d) $f : \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^2$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y - z \end{pmatrix}$ Rta.: no

e) $f : \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^3$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y - z \end{pmatrix}$ Rta.: sí

2) En los casos afirmativos del ejercicio anterior, encuentra el núcleo **N(f)** y la imagen **Im(f)** de cada una de las funciones.

3) Para cada una de las siguientes funciones lineales,

3.1) Halla sus conjuntos núcleo: N(f) e imagen: Im(f).

3.2) Determina una base para N(f) e Im(f) e indica sus dimensiones.

3.3) Clasifícala en monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo y/o automorfismo.

a) $f : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$

b) $f : \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^3$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+z \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$

c) $f : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^3$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x-y \end{pmatrix}$

d) $f : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{3}y \\ 3x+y \end{pmatrix}$

e) $f : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$

f) $f : \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^3$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x-z \end{pmatrix}$

FUNCIONES LINEALES

La siguiente ejercitación ha sido extraída de evaluaciones finales:

1) Sea la transformación lineal $f : IR^3 \to IR^3$, dada por $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \\ y-z \end{pmatrix}$.

a) Define los conjuntos núcleo e imagen de la función.

b) Encuentra una base para cada uno de ellos y determina sus dimensiones.

c) Propone dos vectores que pertenezcan al núcleo de f.

d) Analiza y <u>justifica</u> si el **u =** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertenece a la imagen de f.

2) Sea la función lineal $f : IR^3 \to IR^3$, dada por $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x-y \\ -x+3y-z \end{pmatrix}$

a) Define el núcleo de f. Encuentra una base para el mismo y determina su dimensión. Analiza y <u>justifica</u> si el vector **u** = $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ pertenece al núcleo de f.

b) Define la imagen de f. Encuentra una base para la misma y determina su dimensión. Analiza y <u>justifica</u> si el vector **v** = $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ pertenece a la imagen de f.

c) Enuncia y verifica el teorema de la dimensión.

d) Clasifica la función en monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo, automorfismo, o ninguno de ellos.

3) Sea la transformación lineal

$$f : IR^3 \to IR^2 \text{ , dada por } f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$$

a) Define el núcleo de f. Encuentra una base para el mismo y determina su dimensión. Analiza si el vector **u** = $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenece al núcleo de f.

b) Define la imagen de f. Encuentra una base para la misma y determina su dimensión. Analiza si el vector **v** = $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pertenece a la imagen de f.

c) Enuncia y verifica el teorema de la dimensión.

d) Clasifica la función en monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo, automorfismo, o ninguno de ellos.