ESPACIOS VECTORIALES

1) Determina las componentes y el módulo del vector que tiene su origen en P y su extremo en Q. Representa gráficamente.

a) $P = (7;2)$; $Q = (3;5)$ en IR^2 **b)** $P = (1;-2;4)$; $Q = (5;2;1)$ en IR^3

2) Dados los vectores $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\bar{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ de IR^2, calcula y representa gráficamente los vectores:

a) $\bar{a} + \bar{b}$ **b)** $\bar{c} - 2 \cdot \bar{a}$

3) Sean los vectores de IR^3: $\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\bar{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ determina $\bar{a} + \bar{b}$ y calcula su módulo $|\bar{a} + \bar{b}|$.

4) Calcula el ángulo determinado por los vectores $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5) Dado el vector $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determina su módulo. Indica si se trata de un vector normado o versor. En caso contrario, normalízalo. Recuerda que $\breve{u} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$. Verifica que $\breve{u}$ es normado.

6) Determina un versor que sea ortogonal a $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

7) Dados los vectores $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\bar{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ k \end{pmatrix}$. Calcula el valor de k de modo que:

a) $\bar{a}$ y $\bar{b}$ sean colineales.   **b)** $\bar{a}$ y $\bar{b}$ sean ortogonales, es decir, $\bar{a} \perp \bar{b}$.

8) Calcula el producto vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$, siendo:

a) $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\bar{a} = 2 \cdot \bar{i} - 3 \cdot \bar{j} + 4 \cdot \bar{k}$ y $\bar{b} = 3 \cdot \bar{i} + \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}$

9) Determina un versor $\bar{u}$ que sea ortogonal a los vectores $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\bar{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

10) Considera el paralelepípedo determinado por los vectores:

$\bar{a} = 3 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} + \bar{k}$ $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$ y $\bar{c} = \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}$

a) Calcula su volumen.

b) Halla el área de la cara determinada por $\bar{a}$ y $\bar{c}$.

11) Analiza si los conjuntos dados son de vectores linealmente dependientes o independientes:

En IR^2:   **a)** $A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ **b)** $B = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

En IR^3:   **c)** $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ **d)** $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

12) Dados los siguientes conjuntos de vectores de IR^2:

$$A = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad B = \left\{\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3/2\end{pmatrix}\right\} \qquad C = \left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

a) Analiza y justifica si cada uno de ellos constituye un sistema generador de IR^2.

b) Analiza y justifica si alguno de ellos constituye una base de IR^2.

13) Dados los siguientes conjuntos de vectores de IR^3:

$$A = \left\{\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad B = \left\{\begin{pmatrix}2/3\\5/2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3/2\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\12\\6\end{pmatrix}\right\} \qquad C = \left\{\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

a) Analiza y justifica si cada uno de ellos constituye una base de IR^3.

b) Escribe el vector $\bar{u} = \begin{pmatrix}8\\3\\8\end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de A.

La siguiente ejercitación ha sido extraída de evaluaciones finales:

1) Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$:

a) Analiza y justifica si **u** y **v** son ortogonales. Si no lo son, calcula el ángulo que determinan.

b) Analiza y justifica si {**u** ; **v**} constituye un conjunto de vectores linealmente independiente.

c) Encuentra un vector **x** que sea ortogonal a **u** y a **v**. Analiza y justifica si {**u**; **v**; **x**} constituye un sistema generador de IR^3.

d) Calcula el área del paralelogramo determinado por **u** y **v**.

e) Encuentra un vector **y** que sea combinación lineal de **u** y **v**. Analiza y justifica si el conjunto {**u**; **v**; **y**} constituye una base de IR^3.

2) Dados los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$:

a) Analiza y justifica si {**u** ; **v**} constituye un conjunto de vectores linealmente independientes.

b) Calcula el ángulo que forman dichos vectores.

c) Encuentra un vector **y** que sea linealmente dependiente con **u** y **v**. Analiza si el conjunto {**u** ; **v**; **y**} constituye un sistema generador de IR^3.

d) Analiza y justifica si el vector $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$ es ortogonal a **u** y **v**. Si no lo es, encuentra un vector que lo sea.

e) Analiza y justifica si {**u**; **v**; **w**} constituye una base de IR^3.

3) Dado los siguientes vectores de IR^3: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$

a) Analiza si { $\vec{v}_1$; $\vec{v}_2$ } es un conjunto de vectores linealmente independientes. Justifica.

b) Analiza si { $\vec{v}_1$; $\vec{v}_2$; $\vec{v}_3$ } es un sistema generador de IR^3. Justifica.

c) Encuentra un vector que sea ortogonal a $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, que sea unitario o normado.

d) Si $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{pmatrix}$, halla el valor de **x** para que $\vec{y} \perp \vec{v}_1$.

e) Calcula el ángulo comprendido entre $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

4) Sea el conjunto de vectores $F = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4\}$, donde: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Analiza si $F = \{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; \vec{v}_4\}$ es un sistema generador del espacio vectorial $IR^3(IR)$.

b) Encuentra, si es posible, los coeficientes a , b y g, de manera que el vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_4$ de F.

5) En IR^3 se tienen los vectores **u** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y **v** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Demuestra que **u** y **v** son linealmente independientes.

b) Encuentra, si es posible, los escalares a y ß tales que el vector **w** = $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pueda expresar como combinación lineal de **u** y de **v**.

c) Normaliza los vectores **u**, **v** y **w**.

6) Dados los puntos de IR^2: a = (1 ; 1), b = (-3 ; 3) y c = (1 ; -1)

a) Represéntalos gráficamente.

b) Halla la amplitud de los ángulos interiores del triángulo **abc**, determinado por ellos.

b) Calcula el perímetro y el área del mismo.

7) Halla un vector de dirección perpendicular a **u** = $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y **v** = $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Usando producto escalar.

b) Usando producto vectorial.