SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Teorema de Rouché – Frobenius

Sea un sistema de m ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para que dicho sistema sea **compatible** (tenga solución) es **condición necesaria y suficiente** que el rango de la matriz asociada al mismo sea igual al rango de la matriz ampliada.

La matriz asociada al sistema es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$.

Diremos entonces que el sistema tiene solución si y sólo si **r(A) = r (A')**.

Además, si el sistema es compatible y:

- el rango es igual al número de incógnitas, es decir si **r(A) = r (A') = n**, entonces el sistema tiene solución única, es decir, es **compatible determinado**.
- el rango es menor que el número de incógnitas, es decir si **r(A) = r (A') < n**, entonces el sistema tiene infinitas soluciones, es decir es **compatible indeterminado**.

Si **r(A) ¹ r (A')**, entonces el sistema es **incompatible**, es decir, no tiene solución. En tal caso diremos que el conjunto solución es vacío. (S = ∅)

Sintetizando:

$$\text{SEL} \begin{cases} \text{COMPATIBLE} \to r(A) = r(A') \begin{cases} \text{DETERMINADO} \to r(A) = r(A') = n \quad (\text{S.C.D.}) \to \text{solución única} \\ \text{INDETERMINADO} \to r(A) = r(A') < n \quad (\text{S.C.I.}) \to \text{infinitas soluciones} \end{cases} \\ \text{INCOMPATIBLE} \to r(A) \neq r(A') \quad (\text{S.I.}) \to \text{ninguna solución} \end{cases}$$

PARTE A: Ejercitación Obligatoria

1) Analiza los siguientes sistemas de ecuaciones, determina qué tipo de solución tiene cada uno y encuentra el conjunto solución.

a) $\begin{cases} x + z = 3 \\ 2x + y + 2z = -1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ 3y + z - 2t = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 6y = -1 \\ -7x - 3y = -2 \end{cases}$

2) Dados los siguientes sistemas de ecuaciones mediante sus matrices asociadas, determina qué tipo de solución tiene cada uno de ellos, justificando tus respuestas. En caso de ser compatible, encuentra el conjunto solución.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$ **c)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ **d)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **e)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3) Determina si los siguientes sistemas homogéneos tienen solución no trivial (no nula), dando el conjunto solución. Justifica tus respuestas.

a) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 7z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

4) Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas de ecuaciones, por el método de Cramer.

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y - 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ -x - 3y \qquad = 3 \end{cases}$

5) Indica para qué valores de **a** el siguiente sistema tiene:

- ✓ Solución única
- ✓ Infinitas soluciones
- ✓ Ninguna solución

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + \left(a^2 - 14\right) z = a + 2 \end{cases}$$

6) Parte del propulsante empleado en una etapa de las misiones Apolo a la Luna fue un óxido de nitrógeno, el tetróxido de dinitrógeno (N_2O_4). Uno de los combustibles utilizados en este propulsante fue la hidracina (N_2H_4). La combustión produjo principalmente Nitrógeno y agua. La ecuación química de este proceso es:

$$N_2H_4 + N_2O_4 \rightarrow N_2 + H_2O$$

Balancea tal ecuación.

7) Dado el sistema lineal $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = t \end{cases}$

a) Determina un valor de **t** de modo que el sistema tenga alguna solución.

b) Determina un valor de **t** de modo que el sistema no tenga solución.

8) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + ay + 2z = 1 \\ 2x - y - az = -1 \end{cases}$

a) Define las matrices A (matriz del sistema) y A' (matriz ampliada)

b) Calcula el det (A)

c) Indica para qué valores de ***a*** el sistema es:

- Compatible determinado.
- Compatible indeterminado.
- Incompatible.

9) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 2x - y - 2z = -1 \\ - - - - - - - - \end{cases}$, agrega una nueva ecuación de manera que el sistema resulte:

a) Compatible determinado

b) Compatible indeterminado

c) Incompatible

10) Una nutricionista está preparando una dieta que consta de los alimentos A, B, C. Cada onza del alimento A contiene 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada onza del alimento B contiene 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada onza del alimento C contiene 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidades de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántas onzas de cada comida se necesitan? (Respuesta: **3,2** onzas de **A**; **4,2** onzas de **B** y **2** onzas de **C**)

11) Los 32 alumnos de una clase tienen 18, 19 y 20 años. Si el promedio de sus edades es 18,5 años, ¿cuántos alumnos hay de cada edad, si se sabe que de 18 años hay 6 más que de entre 19 y 20 años? (Respuesta: **19** alumnos de 18 años; **10** alumnos de 19 años y **3** alumnos de 20 años)

12) Una empresa fabrica 3 productos **A**, **B** y **C**, los que procesa en 3 máquinas **I**, **II** y **III**. El tiempo (en horas) requerido para procesar una unidad de cada producto por cada una de las tres máquinas está dado por la siguiente matriz:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ I \\ II \\ III \end{array}$$

Si se dispone de la máquina I por 850 horas, de la máquina II por 1200 horas y de la máquina III por 550 horas, ¿cuántas unidades de cada producto podrán fabricarse si se empleará todo el tiempo disponible de las máquinas? (Respuesta: **100** de A, **150** de B y **200** de C)

13) Una compañía fabrica 3 tipos de galletas: avena con pasas (A), chispas de chocolate (CH) y saladas (S), empaquetadas en cajas pequeñas (P), medianas (M) y grandes (G). La caja pequeña contiene 12 galletas de avena con pasas y 12 galletas de chispas de chocolate. La caja mediana contiene 2 docenas de galletas de avena con pasas, 12 galletas de chispas de chocolate y 1 docena de galletas saladas. La caja grande contiene 2 docenas de galletas de avena con pasas, 2 docenas de galletas de chispas de chocolate y 3 docenas de galletas saladas. Si se necesitan exactamente 15 docenas de galletas de avena con pasas, 10 docenas de galletas de chispas de chocolate y 11 docenas de galletas saladas, ¿cuántas cajas de cada tamaño se deben comprar? (Respuesta: **1** pequeña, **5** medianas y **2** grandes)

PARTE B: Ejercitación Propuesta para el Alumno

1) Dados los siguientes sistemas de ecuaciones mediante sus matrices asociadas, determina qué tipo de solución tiene cada uno de ellos, justificando tus respuestas. En caso de ser compatible, encuentra el conjunto solución.

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$ **c)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **d)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$

2) Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneos tienen solución no trivial (no nula), dando el conjunto solución.

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$

3) Resuelve, <u>si es posible</u>, por el método de Cramer, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ -2x + y + 3z = -1 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ -2x + y = 4 \\ 2y + z = -4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -3x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = 3 \\ 4x + 2z = -1 \end{cases}$

4) Dada la siguiente matriz ampliada, escribe el sistema de ecuaciones asociado a ella y resuélvelo.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

5) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, clasifícalos y determina su conjunto solución:

a) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ -x + 3y - 2z + 2t = -2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ -x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$

6) De un número de tres cifras se sabe que la suma de éstas es igual a 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198. Si se intercambian las de las unidades y decenas, el número aumenta en 36. ¿Cuál es dicho número?

7) Resuelve los siguientes problemas de balanceo de ecuaciones químicas:

a) **a** Fe_2O_3 + **b** H_2O ® **e** $Fe(OH)_3$

b) **a** Cu + **b** H_2SO_4 ® **c** $CuSO_4$ + **d** SO_2 + **e** H_2O

c) **a** $MgCO_3$ + **b** HCL ® **c** $MgCl_2$ + **d** CO_2 + **e** H_2O

d) **a** $MnSO_4$ + **b** $KMnO_4$ + **c** H_2O ® **d** MnO_2 + **e** K_2SO_4 + **f** H_2SO_4

8) ¿Existe algún valor de **r** tal que x = 1, y = 2, z = **r**, sea una solución del siguiente sistema lineal? En tal caso, determínalo.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 11 \\ x - y + 2z = -7 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

9) Analiza para qué valores de λ el siguiente sistema homogéneo tiene solución no trivial: $\begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y = 0 \\ -x + (1 + \lambda)y = 0 \end{cases}$

10) Dado el siguiente sistema de ecuaciones, determina para qué valores de **a**, **b** y **c** el sistema es compatible, es decir, tiene solución.

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x \qquad + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$