CONJUNTOS NUMÉRICOS: REALES (IR) Y COMPLEJOS (C)

SEGUNDA PARTE: NÚMEROS COMPLEJOS

PARTE A: Ejercitación Obligatoria

1) Dados los siguientes números complejos, exprésalos en forma binómica y represéntalos gráficamente.

$z_1 = (2;3)$ $\quad z_2 = \left(-3;\sqrt{5}\right)$ $\quad z_3 = (-4;0)$ $\quad z_4 = \left(-2;-\sqrt{3}\right)$

$z_5 = (0;-3)$ $\quad z_6 = \left(\sqrt{7};-\frac{3}{2}\right)$ $\quad z_7 = (5;0)$ $\quad z_8 = (0;\mathrm{Ln}\,e)$

2) Resuelve las siguientes operaciones con números complejos:

a) $(10;-5) + (-4;2) + (3;1) =$ **b)** $\left(1;\frac{3}{2}\right) + \left(3;-\frac{3}{2}\right) - (-4;1) =$

c) $(3;-1)\cdot(-2;2) =$ **d)** $(2;-3)\cdot(2;3) =$

3) Siendo **u** = $3 - 2i$; **v** = $1 - 2i$ y **w** = $-2 + i$, calcula $\left(\overline{u+v}\right)\cdot w - \left(u - \overline{v}\right) =$

4) Efectúa las siguientes divisiones en C:

a) $z = \frac{1+i}{i}$ **b)** $z = \frac{3}{2-i}$ **c)** $z = \frac{4-6i}{1+i}$ **d)** $z = \frac{2 - i\cdot\sqrt{3}}{1 + i\cdot\sqrt{3}}$

5) Si **z** = $3 - 4i$, encuentra un complejo **z'** tal que $z \cdot z' = 25$

6) Dados los complejos $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + 3\cdot i$ y $z_3 = 2 - i\cdot 2\sqrt{3}$, calcula

$$2\cdot z_1 - \left(z_2^2 - z_3\right) - \frac{z_2}{z_1}$$

7) Dados los números complejos

$z_1 = \sqrt{3} + i$ $\quad z_2 = -1 - i$ $\quad z_3 = -2 - i\cdot 2\sqrt{3}$ $\quad z_4 = -3\cdot i$ $\quad z_5 = -4$

a) Exprésalos en forma polar o trigonométrica.

b) Represéntalos gráficamente.

8) Dados los números complejos $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$ y $z_2 = i\cdot\sqrt{3}$

a) Exprésalos en forma polar o trigonométrica.

b) Resuelve en forma polar y en forma binómica:

b.1) $z_1 \cdot z_2 =$ **b.2)** $\frac{z_1}{z_2} =$ **b.3)** $z_1^2 =$ **b.4)** $z_1^3 =$

CONJUNTOS NUMÉRICOS: REALES (IR) Y COMPLEJOS (C)

9) Halla en C las raíces indicadas: **a)** $\sqrt{\sqrt{3}+i}$ **b)** $\sqrt[4]{\dfrac{1+i}{1-i}}$

10) Resuelve en C las siguientes ecuaciones. Representa gráficamente las soluciones.

a) $x^2 - 4i = 0$

b) $x^4 - 1 = 0$

c) $x^3 + 8 = 0$

11) Calcula e^z en cada uno de los siguientes casos: **a)** $z = \pi \,.\, i$ **b)** $z = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} i$

12) Calcula Ln z en cada uno de los siguientes casos. Representa gráficamente.
a) $z = -3$ **b)** $z = e^4$ **c)** $z = e \cdot i$

PARTE B: Ejercitación Propuesta para el Alumno

1) Indica en cada caso el valor de **x** sabiendo que $z_1 \in$?, $z_2 \in$? y $z_3 \in$?.

a) $z_1 = (2; x)$ **b)** $z_2 = (1; -x + 2)$ **c)** $z_3 = (-4; 2x + 1)$

2) Indica en cada caso el valor de **x** sabiendo que z_1, z_2 y z_3 son imaginarios puros.

a) $z_1 = (3x; 2)$ **b)** $z_2 = (x + 1; -1)$ **c)** $z_3 = (-1 + 3x; 4)$

3) Siendo **u** = $1 - 2i$; **v** = $-2 + 3i$ y **w** = $-1 + 4i$, calcula:

a) $u \cdot \overline{v} - \overline{u} \cdot v + \overline{\overline{w}} =$ **b)** $\left(\overline{u+v}\right) \cdot \left(\overline{u} - \overline{v}\right) =$

4) Calcula z en cada uno de los siguientes casos:

a) $z = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}}$ **b)** $z = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}}$ **c)** $z = \dfrac{i^2 + i^4 + i^6}{i^3 + i^5 + i^7}$

5) Expresa los siguientes complejos en forma polar o trigonométrica. Represéntalos gráficamente.

$z_1 = -8$ $z_2 = 2i$ $z_3 = 2 - i\,2\sqrt{3}$ $z_4 = -\sqrt{3} + i$ $z_5 = \dfrac{(3-i)\cdot(2+i)}{i}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS: REALES (IR) Y COMPLEJOS (C)

6) Dados los números complejos $z = \sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \right)$ y $z = \sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \right)$ calcula en forma polar o trigonométrica y en forma binómica: **a)** $z \cdot z'$ **b)** $\frac{z}{z'}$

7) Halla z^6, siendo $z = \left(-2 - 2\sqrt{3}\, i\right) \cdot \left(2 - 2\sqrt{3}\, i\right)$

8) Halla en C $\sqrt{z}$, siendo $z = e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

9) Resuelve en C las siguientes ecuaciones:

a) $\left(-1 + i \cdot \sqrt{3}\right) \cdot x = 1$ **b)** $(3 - 2i)^3 \cdot x = i$

c) $x^5 - 32 = 0$ **d)** $x^3 - 2 + i = 0$

10) Determina el valor principal de **z**, si $(-e)^z = i$

PROPUESTOS TEÓRICOS (Consulta la bibliografía para realizar estos ejercicios)

1) Realiza en forma genérica el proceso de la división en C: $\frac{a + bi}{c + di}$.

2) Un número complejo $z = (a; b)$ puede ser expresado en forma binómica como $z = a + bi$. El conjugado de z es $\overline{z} = (a; -b) = a - bi$. Demuestra a qué es igual:

a) $z + \overline{z} =$ **b)** $z - \overline{z} =$ **c)** $z \cdot \overline{z} =$

3) Expresa simbólicamente y demuestra las siguientes afirmaciones:

a) Un número complejo es real si y sólo si es igual a su conjugado.

b) El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados.

c) El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados.

d) Un número complejo es imaginario puro si y sólo si es igual al opuesto de su conjugado.

4) Demuestra las siguientes propiedades:

a) Si z = a + bi, entonces $|z| \geq a$.

b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5) Si z = a + bi, entonces $\sqrt{z} = x + yi \,/ (x + yi)^2 = a + bi$

a) Demuestra que $x = \pm\sqrt{\dfrac{|z| + a}{2}} \wedge y = \pm\sqrt{\dfrac{|z| - a}{2}}$.

b) De los cuatro pares de valores posibles, determina cómo se seleccionan los dos correctos.

c) Calcula $\sqrt{z}$, siendo z = 5 – 12i

6) Sean $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \text{sen}\varphi_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \text{sen}\varphi_2)$ dos complejos dados en forma trigonométrica. Demuestra a qué es igual:

a) $z_1 \cdot z_2$ **b)** $\dfrac{z_1}{z_2}$

7) Sea $z = \rho(\cos\varphi + i \cdot \text{sen}\varphi)$ un complejo cualquiera dado en forma trigonométrica.

a) Demuestra a qué es igual z^2 y z^3.

b) Observa los resultados obtenidos e induce a qué es igual z^n.

8) Al analizar las raíces n-ésimas de un número complejo distinto de cero, surge una propiedad geométrica que nos permite dibujar polígonos regulares. Haciendo uso de tal propiedad, dibuja, inscriptos en circunferencias de radio 1

a) un triángulo equilátero

b) un pentágono regular

¿Cómo aprovecharías los dibujos anteriores para dibujar los mismos polígonos inscriptos en circunferencias de radio cualesquiera, centradas en el origen de coordenadas?