

# Una aplicación introductoria al método de elementos finitos

Luciana Liria, Georgina B. Rodríguez y Marta G. Caligaris

Grupo Ingeniería & Educación  
Facultad Regional San Nicolás – Universidad Tecnológica Nacional  
Colón 332 (2900) San Nicolás, Argentina  
gie@frsn.utn.edu.ar

## 1. Resumen

Los alumnos de ingeniería deben aprender a describir matemáticamente los problemas que se les presentarán en la vida profesional, y deben saber que, aún cuando las ecuaciones que los modelen no tengan solución analítica los ingenieros deben encontrar soluciones a sus problemas. Lo más probable es que para obtener estas soluciones usen un programa comercial diseñado específicamente para resolverlos pero, aún así, es importante que conozcan la esencia del método de solución.

El método de elementos finitos es utilizado en forma profesional para resolver problemas de ingeniería de gran porte. Por esta razón, en los nuevos diseños curriculares de las carreras de ingeniería hay asignaturas que incluyen una introducción a este método en sus programas y, en diversas especialidades se ofrecen cursos específicos que brindan la oportunidad de estudiarlo más profundamente.

Con el objetivo de iniciar a los alumnos en el uso de este método, se diseñó una interfaz en Visual Basic en la que se utiliza el método de elementos finitos, basado en una formulación residual, el método de Galerkin (Zienkiewicz y Taylor, 1999; Huebner y col., 1995). En esta ventana puede obtenerse la solución de diferentes problemas de conducción de calor en una dimensión, estacionarios o dependientes del tiempo. Esta solución se presenta gráficamente, como es habitual en los programas comerciales.

La ventaja de esta ventana, en comparación con otras que se han realizado con objetivos similares (Caligaris y Rodríguez, 2008), es la independencia de la misma del software o lenguaje utilizado en su desarrollo. Visual Basic permite desarrollar aplicaciones para correr bajo Windows, sin depender de ningún otro programa.

## 2. Introducción

Cuando diferentes partes de un cuerpo están a distintas temperaturas, el calor fluye desde la parte más caliente hacia la más fría. Hay tres formas distintas en las que esta transferencia de calor tiene lugar: conducción, convección y radiación. En líquidos y gases la convección y la radiación son importantes, pero en los sólidos no hay convección y la radiación es generalmente despreciable. En este trabajo sólo se considerará la conducción de calor en sólidos, cuya ecuación, cuando se trabaja en una dimensión y hay generación de calor en el sólido, se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = Q(x, t) + \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1)$$

siendo  $k$  la conductividad térmica,  $\rho$  la densidad y  $c$  el calor específico del sólido,  $Q$  el calor generado por unidad de longitud por unidad de tiempo y la temperatura  $\phi$  en un punto  $P(x)$  una función continua de las variables  $x$ ,  $t$  (Carslaw y Jaeger, 1959).

La ecuación de conducción del calor se resuelve sujeta a ciertas condiciones iniciales y de frontera adecuadas. En las fronteras, lo más usual es especificar la temperatura o el flujo a través de un borde.

En la Figura 1 se muestra la ventana de inicio de la aplicación que se describe en este trabajo.

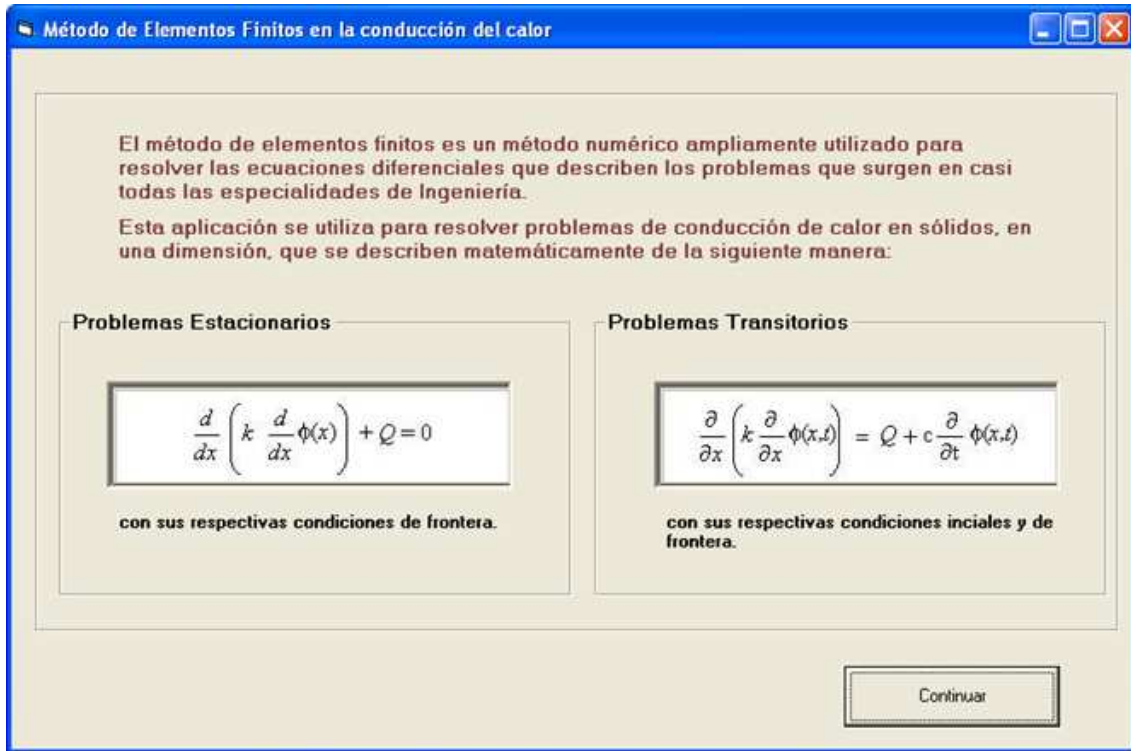


FIGURA 1. Ventana de inicio de la aplicación

### 3. El Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos es un método numérico ampliamente utilizado para resolver distintos problemas que surgen en casi todas las especialidades de ingeniería.

La discretización en elementos finitos transforma el problema original, en un problema con un número finito de incógnitas, dividiendo el dominio en elementos y expresando la función incógnita en términos de funciones de aproximación conocidas dentro de cada elemento:  $\phi \approx T = \sum a_i N_i$ .

Las funciones  $N_i$ , también llamadas de interpolación o de forma, se definen a partir de los valores de la incógnita en puntos específicos llamados nodos. Los valores en los nodos y las funciones de forma para los elementos definen el comportamiento de la función buscada. En el caso de los problemas unidimensionales que se podrán resolver con esta aplicación, las funciones de forma para representar la variación de la variable dentro del elemento serán lineales o cuadráticas, según que la cantidad de nodos para cada elemento sea, respectivamente, dos o tres.

Existen distintas técnicas para obtener las ecuaciones correspondientes a problemas dependientes del tiempo. Lo más usual es considerar una discretización del dominio espacial de la forma habitual.

Así,  $\phi \approx T = \sum a_i(t) N_i$ , donde  $a_i(t)$  son las temperaturas en los nodos, que ahora dependen del tiempo.

A partir de la expresión anterior se derivan las ecuaciones elementales y, ensamblándolas, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. La solución del problema se alcanza cuando se resuelven estas ecuaciones para encontrar las temperaturas en los nodos, en los distintos instantes de tiempo, teniendo en cuenta las condiciones iniciales correspondientes.

Existen muchos métodos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este trabajo se utilizan algoritmos basados en métodos de diferencias finitas.

#### 4. La aplicación

Visual Basic es una herramienta de diseño de aplicaciones que corren bajo Windows. Es un entorno relativamente sencillo que facilita la creación de programas gráficos. Pero, a diferencia de otros programas con los que se pueden crear ventanas similares, se deben programar absolutamente todos los procedimientos de cálculo necesarios (Caligaris y Rodríguez, 2008). Como toda aplicación de Windows, estos programas se desarrollan sobre una ventana, y allí se pueden incorporar todo tipo de botones, cuadros de texto, objetos gráficos, entre otros, y organizarlos en forma de solapas u otras ventanas.

La aplicación que se presenta en este trabajo está desarrollada sobre una única ventana, con diferentes solapas para ingresar distintos tipos de información o visualizar los resultados. Con ella pueden resolverse problemas estacionarios o transitorios en una dimensión. Para describir el problema a resolver, se deben ingresar, en las solapas correspondientes, los datos que lo caracterizan: las propiedades del material, la fuente de calor, las condiciones de frontera, y las condiciones iniciales en caso de trabajar con un problema transitorio.

Método de elementos finitos en la conducción del calor

Material Fuente de calor Condiciones de Frontera Condiciones Iniciales Discretización Resultado

Elección del Material a Ensayar:

Material: Plata

Conductividad: 429 W/(m K)

Densidad: 10490 Kg/m<sup>3</sup>

Calor específico: 237 J/(kg K)

Longitud de la barra

Ingrese la longitud de la barra: 0.3 metros

FIGURA 2. Ingreso de datos: solapa de propiedades del material

Una vez cargados los datos en las solapas correspondientes se puede ver, en la solapa de resultado, un resumen de las características del problema, junto con un gráfico de la solución aproximada obtenida, como muestran las figuras 3 y 4.

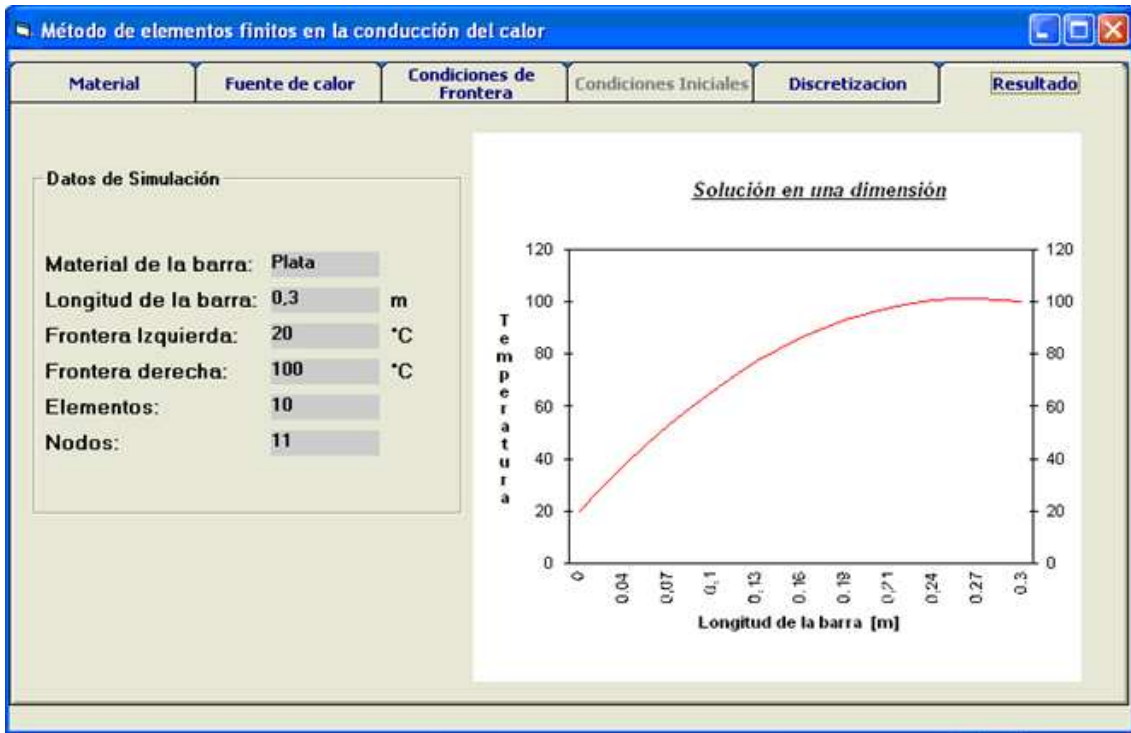


FIGURA 3. Visualización de resultados para un problema estacionario

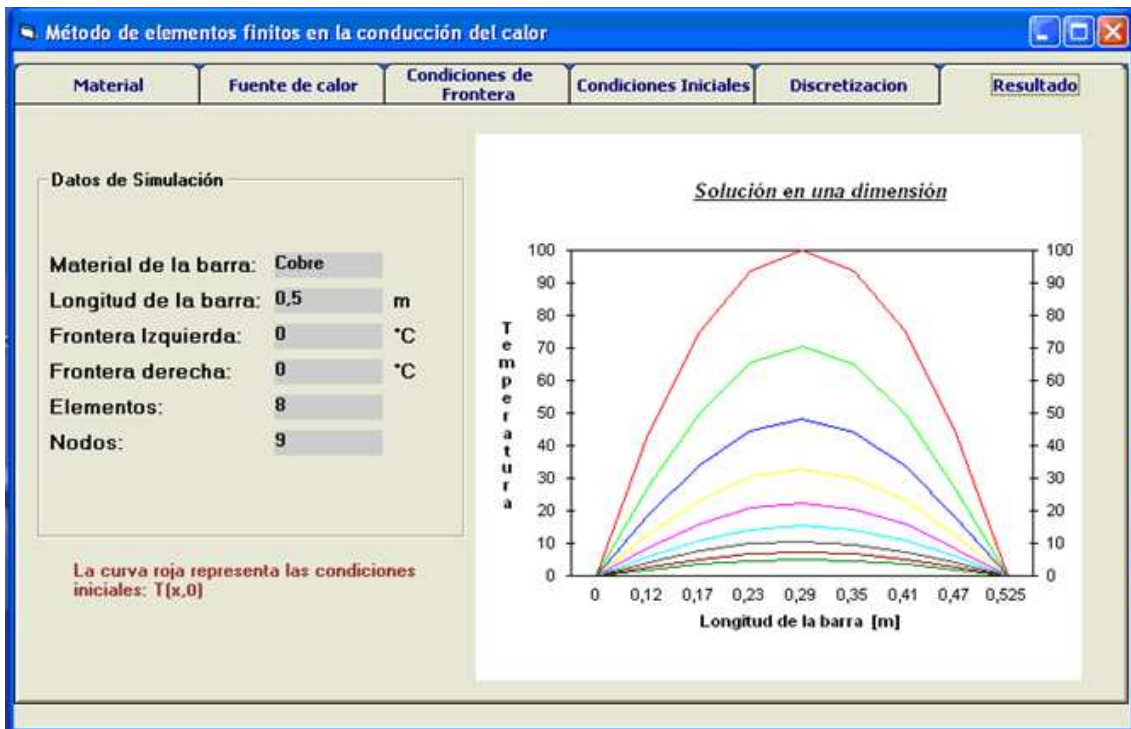


FIGURA 4. Visualización de resultados para un problema transitorio

## 5. Conclusiones

Con rudimentos básicos de programación, pero con dominio del tema, se logró realizar una aplicación introductoria al método de elementos finitos. Una alternativa para generar una ventana similar, sin tener que escribir todas las rutinas específicas, como por ejemplo la obtención de la solución de sistemas de ecuaciones lineales o la integración numérica, es trabajar con librerías DLL generadas desde Matlab.

Esta herramienta tiene por objetivo iniciar al alumno en el tema, luego se puede continuar con otras que trabajan el MEF en más dimensiones. Lo importante es que el alumno no sólo se acostumbre a visualizar los resultados en la forma en que los programas comerciales los muestran, sino que trabaje con el código necesario para lograrlos con programas propios.

## 6. Bibliografía

- Caligaris, M.G. y Rodríguez, G.B. (2008) "El método de elementos finitos, ¿qué se esconde detrás de los paquetes comerciales?" Anales del Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica.
- Carslaw, H.S. y Jaeger J.C. (1959) Conduction of Heat in Solids. Second Edition. Clarendon Press. Oxford,
- Halvorson, M. (1998) Aprenda Visual Basic Ya. Microsoft Press.
- Huebner, K.H., Thornton, E.A. y Byrom T.G. (1995) The Finite Element Method for Engineers. John Wiley & Sons.
- Zienkiewicz O.C. y Taylor R.L. (1999) El Método de los Elementos Finitos. Mc Graw Hill – CIMNE. Volumen 1.