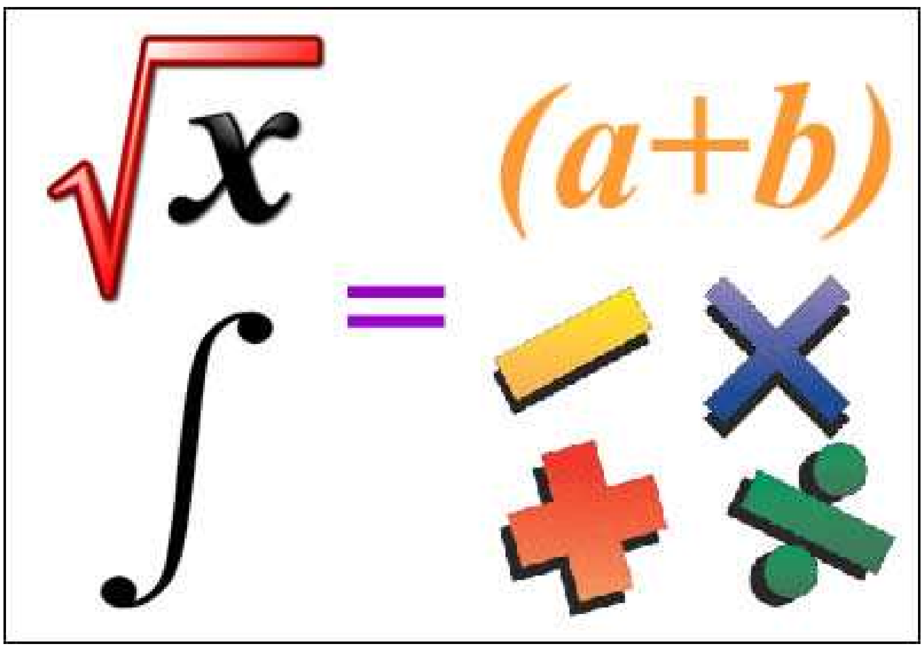
GUÍA DE ESTUDIO
DE
MATEMÁTICA



"La matemática es el trabajo del espíritu humano que está destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla".

Evariste Galois

CONTENIDOS DE MATEMÁTICA

MÓDULO I: CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos N(naturales), Z(enteros), Q(racionales) y R(reales). Operaciones y propiedades. Radicales. Valor absoluto. Intervalos reales. Ecuaciones e inecuaciones en R. El conjunto C de los números complejos. Definición y operaciones.

MÓDULO II: FUNCIONES I. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Funciones: definición y clasificación. Función inversa. Interpretación de gráficos. Función afín. Función cuadrática. Ecuaciones de 2° grado. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: método gráfico y métodos analíticos.

MÓDULO III: POLINOMIOS. FUNCIONES II

Funciones polinómicas. Polinomios. Factorización. Expresiones algebraicas racionales: operaciones. Función exponencial. Función logarítmica. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Función racional: definición, dominio y ceros.

MÓDULO IV: TRIGONOMETRÍA

Ángulos orientados. Sistemas de medición. Las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Circunferencia trigonométrica. Signo de las funciones trigonométricas. Funciones trigonométricas: representación gráfica y análisis. Las funciones recíprocas del seno, el coseno y la tangente. Resolución de triángulos rectángulos.

MÓDULO 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Naturales (N)
Cero (0) Enteros Racionales (Q)
Negativos
Reales (R) Complejos (C)
Fraccionarios

Irracionales

Imaginarios

Números Naturales

Surgen con la necesidad de contar. Tomando al número 1 como primer elemento del conjunto de los naturales y, la operación que consiste en sumar 1 a cada número que se va obteniendo, se forma el conjunto **N**.

Propiedades:

- Es un conjunto infinito, totalmente ordenado por la relación de menor o igual (≤).
- Tiene primer elemento: el número 1.
- No tiene último elemento, es un conjunto infinito.
- Todo número natural tiene un siguiente.
- Entre dos números naturales existe un número finito de números naturales, por eso decimos que es un **conjunto discreto**.

Números Enteros

En el conjunto **N**, es posible definir, sin ninguna restricción la suma. Cuando definimos la resta, es necesario imponer la condición de que el minuendo sea mayor que el sustraendo. La sustracción en **N** no es una operación cerrada.
Es entonces cuando aparece el conjunto de los números enteros, al cual designaremos **Z**.

Propiedades:

- Es un conjunto infinito, totalmente ordenado por la relación de menor o igual (≤).
- No tiene primero ni último elemento.
- Todo número entero tiene un antecesor y un siguiente.
- Entre dos números enteros existe un número finito de números enteros, por eso decimos que es un **conjunto discreto**.

A los números que utilizamos para contar la cantidad de elementos de un conjunto no vacio se los denomina Números Naturales. Designamos con **N** al conjunto de dichos números.

N = {1, 2, 3, 4, 5,….}

Si a, b $\in$ **N** entonces a + b $\in$ **N** y a.b $\in$ **N**

No es cierto en general que si a, b $\in$ **N** entonces a - b $\in$ **N**. Esto ocurre si y sólo si b<a.

Ejemplo: 1 – 1 = 0 $\notin$ **N**

1 – 2 = -1 $\notin$ **N**

3 – 1 = 2 $\in$ **N**

Indicamos con:

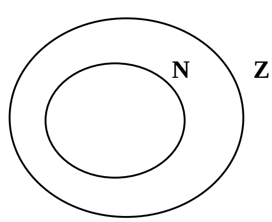
$\mathrm{N}^{-} = \{-a / a \in \mathrm{N}\}$ o sea $\mathrm{N}^{-} = \{-1,-2,-3,-4,-5,....\}$

$\mathrm{N} \cap \mathrm{N}^{-} = \varnothing$

Definimos al conjunto de los números **enteros** como:

$\mathrm{Z}=\mathrm{N}^{-} \cup \{0\} \cup \mathrm{N}$

Los naturales se identifican con los enteros positivos, es decir $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$.



✐<u>Ejercicio 1</u>: ¿Cuántos enteros existen entre los números consecutivos 2 y 3?, y ¿entre 5 y 6? , y ¿entre n y n+1?

✏<u>Ejercicio 2</u>: ¿Cuántos enteros existen entre 2 y 10?, y ¿entre -3 y 7?

✏<u>Ejercicio 3</u>: ¿Qué puede afirmarse sobre la cantidad de enteros que existen entre dos enteros dados?

Números Racionales

Racional proviene de razón, y razón indica cociente, por lo tanto, diremos que un número es racional, si puede expresarse mediante una razón entre dos números enteros, siempre y cuando, el segundo sea distinto de cero (porque la división por cero no está definida).

Propiedades:

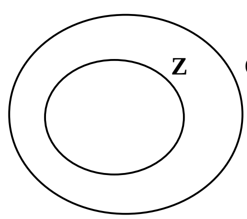
- Es un conjunto infinito, totalmente ordenado por la relación de menor o igual (≤).
- No tiene primero ni último elemento.
- Entre dos números racionales existe un número infinito de números racionales, por eso decimos que es un **conjunto denso**. Como consecuencia, ningún racional tiene antecesor, ni sucesor.

Llamamos número racional a todo número que se puede expresar como fracción $\frac{m}{n}$ donde n y m son enteros y n≠0.

Con **Q** denotamos la totalidad de los números racionales.

Observemos que:

- Todo número entero es racional, pues si $m \in Z$ escribimos $m = \frac{m}{1} \in Q$. Es decir $Z \subset Q$.



- La recíproca es falsa, por ejemplo, $\frac{1}{2} \in Q$ pero $\frac{1}{2} \notin Z$.

Si u, v $\in$ Q, entonces:

✓ u + v $\in$ Q

✓ u – v $\in$ Q

✓ u . v $\in$ Q

✓ Si u≠0 entonces $\frac{1}{u} \in Q$

✐Ejercicio 4: Halla un número racional entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{7}$. Halla un número racional entre $\frac{7}{3}$ y $\frac{8}{7}$ ¿puedes hallar más de un número racional?

Números Irracionales

A los números reales que no se los puede expresar en forma de fracción, se los denomina números irracionales. Es decir, expresado en forma decimal no es exacto ni periódico.

Ejemplos:

a) 0,1234567891011… (La parte decimal de este número irracional es la sucesión de los números naturales)

b) $\pi \cong 3{,}141592654$ (Representa una aproximación del número irracional π. Notemos que también existen otras aproximaciones para este número; por ejemplo: 3,14 ; 3,141 ; 3,14159 ;… etc.)

c) $\sqrt{2} \cong 1{,}414213562$

d) $e \cong 2{,}71$

e) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618033989$

✐Ejercicio 5: Resuelve las siguientes operaciones en **Q**:

a) $3-\{7-[3\cdot(-4+1)+5]+(-3+2)\}=$

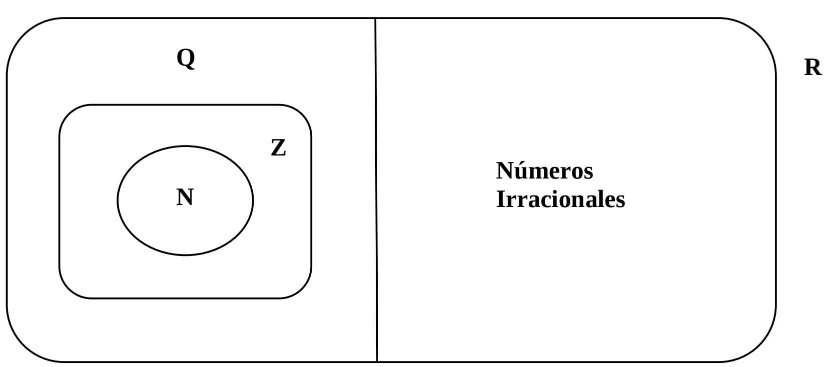
b) $-\frac{3}{4}+(-5)\cdot\frac{4}{15}+\frac{3}{5}\div\frac{12}{25}=$

c) $(\frac{2}{3}-2)\cdot(\frac{7}{2}+\frac{5}{4})=$

d) $(-3-\frac{2}{5}):\frac{34}{15}=$

Números Reales

La unión del conjunto **Q** de números racionales y el conjunto de los números irracionales es el conjunto **R** de los números reales.



El conjunto de los números reales también puede expresarse sobre una recta. A cada número real le corresponde un único punto de la recta y cada punto de la recta representa un único número real. A esta recta la llamamos **recta real**.

✎Ejercicio 6: Tacha los números que no correspondan a la clasificación:

N (naturales): 0; 1/4; -1; 73; $\sqrt{3}$; 0,8; 4

Z (enteros) : 1/5; 8; $\sqrt{2}$; 0; π; -3; 6.25; 3/7

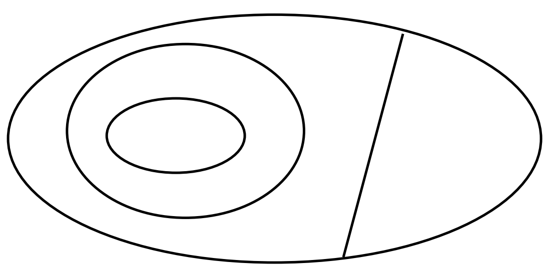
Q (racionales): -3; 5/2; 2,7; π; $\sqrt{2}$; $5,\hat{3}$; 0,283

I (irracionales): -3/5; 7; π; $\sqrt{3}$; 0,54; 1/3; $\sqrt{4}$

✎Ejercicio 7: Dados los siguientes números reales:

$$\sqrt{3}\ ;\ 1{,}732\ ;\ (\sqrt{3}+\frac{1}{2})\ ;\ (\sqrt{3}-\frac{1}{2})\ ;\ \sqrt[9]{-1}\ ;\ -\frac{25}{15}\ ;\ 1{,}73\ ;\ 1{,}73333....\ ;\ -3.74$$

a) Ordena de menor a mayor los números dados
b) Identifica las regiones correspondientes a los conjuntos numéricos: IN, Z, Q, II y IR.
c) Ubica los números dados en el diagrama.



✎Ejercicio 8: Indica verdadero (V) o falso (F), según corresponda. Justifica las respuestas falsas.

a) La suma de dos números naturales es otro número natural. ( )
b) Si a un nº natural le restamos su consecutivo, obtenemos otro nº natural. ( )
c) Dado un número natural, siempre existe uno menor que él. ( )
d) El cociente entre dos números enteros es otro número entero. ( )
e) El producto de dos números irracionales es otro número irracional. ( )
f) Todo número racional se puede expresar como fracción. ( )
g) Algún número entero es natural. ( )
h) Todo número racional es irracional. ( )
i) Entre dos números racionales existen infinitos racionales. ( )

j) La suma de un número irracional y un número racional es un número irracional. ( )

k) Todo número real elevado a la cero, es 1. ( )

l) La potenciación es distributiva respecto de la sustracción. ( )

m) La radicación es distributiva respecto de la división de números reales. ( )

n) Una raíz de índice par y radicando negativo es siempre un número real positivo. ( )

o) Toda fracción de denominador cero es igual a cero. ( )

POTENCIACIÓN EN R

Definimos $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{n veces}}$

Donde: **a** es un número real al que denominaremos **base** y **n** un número natural que llamaremos **exponente**.

Ejemplo: $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

Extendemos la definición para exponentes enteros:

Por convención se tiene: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

Ejemplo:

- $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
- $(-2)^0 = 1$

✐Ejercicio 9: Simplifica las siguientes expresiones utilizando las propiedades de la potenciación:

a) $5^3 : 5^5 =$

b) $(-1/3)^2 \cdot (-1/3)^3 \cdot (-1/3)^7 =$

c) $[-4^{-5}.(-3)^2]^0 =$

d) $\frac{3^3.3^4}{3^6} =$

e) $2^4 \cdot 2^{-5} \cdot 2 =$

f) $\{[(-2)^3]^0\}^{-2} =$

g) $(-2)^4 =$

h) $\frac{3^0.3^{-3}.3^{-1}.5^2}{(-5)^2.(-3)^{-4}} =$

RADICACIÓN EN R

Definimos $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Donde: **n** es un número natural. $\sqrt[n]{a}$ se lee raíz n-ésima de **a**

Observemos que para que la definición tenga sentido,

- si **n** es par, **a** debe ser un número real positivo,

- si **n** es impar, **a** puede ser cualquier número real.

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$ pues $3^4 = 81$

La raíz n-ésima de un número suele también denotarse como potencia $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Además, $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ si $a \geq 0$

✐Ejercicio 10: Resuelve las siguientes operaciones con radicales:

a) $2\sqrt{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$

b) $\sqrt{5} - 2\sqrt{3} =$

c) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{3} - \sqrt{48} =$

d) $\frac{1}{3}\sqrt{8} - 2\sqrt{18} =$

e) $2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[9]{64} + 4\sqrt[6]{16} =$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{14} =$

g) $\sqrt[4]{32} \div \sqrt[4]{6} =$

h) $\sqrt{32} \cdot \sqrt[3]{4} =$

i) $\sqrt[6]{25x^2} \div \sqrt{5x} =$

j) $\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 =$

k) $\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{8}\right)^2 =$

El siguiente cuadro resume las propiedades que verifican las operaciones de suma, producto, potencia y raíz en **R** y en cada subconjunto de éste. Tener en cuenta que la propiedad no se cumple en el conjunto numérico correspondiente a la celda sombreada.

OPERACIONES	**PROPIEDADES**	**N**	**Z**	**Q**	**R**
Suma	1. Asociativa	a + (b + c) = (a + b) + c			
	2. Conmutativa	a+ b = b + a			
	3. Elemento neutro		0		
	4. Elemento opuesto de **a**		-a		
Producto	1. Asociativa	a . (b . c) = (a . b) . c			
	2. Conmutativa	a. b = b . a			
	3. Elemento neutro	1			
	4. Elemento inverso de **a** (**a**≠0)			$\frac{1}{a}$	
Suma – Producto	1. Distributiva	a . (b + c) = a.b + a.c			
Potencias	1. Producto de potencias con la misma base	$a^m . a^n = a^{m+n}$			
	2. Cociente de potencias con la misma base	$a^m : a^n = a^{m-n}$			

	3. Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{m.n}$
	4. Potencia de un producto	$(a \, . \, b)^n = a^n . \, b^n$
	5. Potencia de un cociente	$(a : b)^n = a^n : b^n$
Raíces	1. Producto de radicales con el mismo índice	$\sqrt[n]{a} \, . \, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
	2. Cociente de radicales con el mismo índice	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$
	3. Raíz de una raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
	4. Potencia de un radical	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

✐Ejercicio 11: Resuelve las siguientes operaciones en IR:

a) $\sqrt{80} - \sqrt{125} + 2\sqrt{5} =$

b) $\sqrt{50} + \sqrt{18} - \sqrt{72} - \sqrt{162} =$

c) $(3^4.3^{-2} + 3^2)^{0,5} =$

d) $\sqrt[3]{81a^6} + \sqrt[3]{3c^3} + \sqrt[3]{24b^9} =$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

f) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 =$

g) $\sqrt{3}.\sqrt{12} =$

h) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) =$

i) $\left(3 + \sqrt{5}\right)\left(3 - \sqrt{5}\right) =$

j) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{8}\right)^2 =$

k) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} =$

l) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}} \cdot \left(\sqrt[8]{\frac{1}{3}}\right)^2 =$

m) $\sqrt{2}.\sqrt[5]{2} =$

n) $\sqrt[3]{a^2}.\sqrt{a^3} =$

✐Ejercicio 12: Resuelve aplicando propiedades:

a) $\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{3} - 1\right) - \frac{2}{9} =$

b) $(-3)(-4) + 15 \div (-3) - (1500)^0 =$

c) $4^3 - 4^5 \div 4^2 + (-4)^2(-4) =$

d) $\sqrt[3]{3^4 \div 3} + \sqrt[3]{(-1)^3} - \sqrt{(-1)^2} =$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} =$

f) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{81}} + \sqrt{\left(1 - \frac{5}{9}\right)^{-1}} =$

g) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3 =$

RACIONALIZACIÓN DEL DENOMINADOR

Con frecuencia resulta útil eliminar el radical del denominador, multiplicando tanto el numerador como el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se conoce como *racionalización del denominador*. Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{1.\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

Observa que el denominador de la última expresión no contiene ningún radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con m<n, entonces para racionalizar debemos multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2^1}}=\frac{3}{\sqrt[5]{2^1}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}}=\frac{3.\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[5]{16}$$

Si el denominador es de la forma $\left(a\pm b\right)$, siendo **a** y/o **b** un radical, para racionalizar debemos multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$(a+b)\,.\,\underbrace{(a-b)}_{\text{conjugado}} = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}}=\frac{4}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{4.\left(1+\sqrt{3}\right)}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4.\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-3}=\frac{4.\left(1+\sqrt{3}\right)}{-2}=-2-2.\sqrt{3}$$

✐<u>Ejercicio 13</u>: Racionaliza los siguientes denominadores y resuelve:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}=$

b) $\frac{3}{\sqrt{3}}=$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=$

d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=$ (para $x\rangle 0$)

e) $\frac{2}{\sqrt{5}-2}=$

f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=$

g) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}+\sqrt{10}}=$

h) $\frac{-3}{1+\sqrt{2}}=$

i) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=$

j) $\frac{b^2}{\sqrt[3]{b}}=$

k) $\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}=$

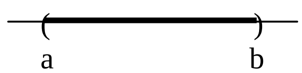
l) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{15}}=$

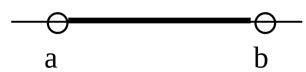
INTERVALOS REALES

Frecuentemente trabajaremos con subconjuntos de números reales, expresados de acuerdo con alguna relación de orden, como por ejemplo: “los números reales mayores que 2 y menores que 5”, simbólicamente: $\{x \in R \ / \ 2 < x < 5\}$; “los números reales menores o iguales que $\frac{3}{2}$”, en símbolos: $\left\{x \in R \ / \ x \leq \frac{3}{2}\right\}$. Estos subconjuntos en **R** se definen mediante **intervalos**.

- **Intervalo abierto (a , b):** si a, b $\in$ R y a < b; se define (a , b) = $\{x \in R \ / \ a < x < b\}$

Gráficamente:





- **Intervalo cerrado [a , b]:** si a, b $\in$ R y a ≤ b; se define [a , b] = $\{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$

Gráficamente:

- **Intervalo semiabierto o semicerrado:** si a, b $\in$ R y a < b; se define:

  (a , b] = $\{x \in R \ / \ a < x \leq b\}$

  [a , b) = $\{x \in R \ / \ a \leq x < b\}$

Si **a** coincide con **b**, el intervalo cerrado es un único punto.

Los números **a** y **b** se llaman **extremo inferior** y **extremo superior** del intervalo respectivamente.

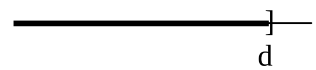
Estas definiciones se pueden generalizar, considerando a la recta y a la semirrecta como intervalos, con sólo introducir los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ (los que deben ser considerados con especial cuidado, recordando que se usan solamente por conveniencia de notación y nunca como números reales).

Así tenemos:

$[c\ ,+\infty) = \{x \in R \ / \ x \geq c\}$

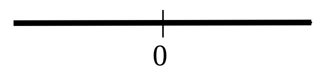
$(c\ ,+\infty) = \{x \in R \ / \ x > c\}$

$(-\infty\ , d] = \{x \in R \ / \ x \leq d\}$



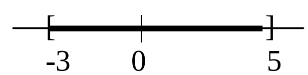
$(-\infty\ , d) = \{x \in R \ / \ x < d\}$

$(-\infty\ ,+\infty) = R$

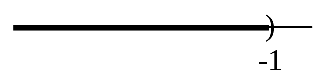


Ejemplos:

a) $[-3\ , 5] = \{x \in R \ / \ -3 \leq x \leq 5\}$



b) $(-\infty\ , -1) = \{x \in R \ / \ x < -1\}$



c) $(0\ , 2) = \{x \in R \ / \ 0 < x < 2\}$

d) $\left(-\frac{1}{3}\ ,\ \frac{4}{3}\right] = \left\{x \in R \ / \ -\frac{1}{3} < x \leq \frac{4}{3}\right\}$

✐<u>Ejercicio 14</u>: Dados los siguientes subconjuntos de R, exprésalos como intervalos y represéntalos en la recta numérica:

a) $A = \{x/x \in R \wedge -2 \leq x \leq 3\}$

b) $B = \{x/x \in R \wedge -3 < x < 3\}$

c) $C = \{x/x \in R \wedge -1 < x \leq \frac{1}{2}\}$

d) $D = \{x/x \in R \wedge -\frac{3}{4} \leq x < \frac{1}{4}\}$

e) $E = \{x/x \in R \wedge x > -2\}$

f) $F = \{x/x \in R \wedge x \leq \frac{5}{2}\}$

Ejercicio 15: Representa gráficamente en la recta numérica los intervalos para hallar el resultado de las operaciones que se indican a continuación:

a) $(1;4) \cap (3;8) =$
b) $(-\infty\,;3) \cap [2\,;\infty) =$
c) $[3\,;5]^{C} =$
d) $(-\infty\,;3] \cap [3\,;\infty) =$
e) $(-2\,;5] \cup (4\,;7] =$
f) $(-\infty\,;5) \cap (5\,;\infty) =$
g) $(-5\,;3) \cup (-3\,;2] =$
h) $(-5\,;3) \cap (-3\,;2] =$

Ejercicio 16: **I**ndica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

a) $0{,}6 \in [0{,}2]$ ( ) b) $2{,}3 \in [-1{,}4)$ ( )

c) $\pi \in (3;\ 3{,}14]$ ( ) d) $[-2\,,1] \cap [0{,}2] = [0{,}1]$ ( )

e) $(-\infty,5) \cup [0,+\infty) = (-\infty,0]$ ( ) f) $\{x \in R:\ -2 \le x \le 2\} = [-2{,}2]$ ( )

ECUACIONES

El lenguaje matemático es, casi siempre, un lenguaje simbólico. El matemático expresa simbólicamente situaciones formuladas en palabras. De esta forma plantea ecuaciones: ‘traduciendo las palabras a símbolos”.

¿Qué es una ecuación?

Podemos definir a las ecuaciones como una igualdad entre cantidades, en la que intervienen una o más letras, llamadas **incógnitas** (cuyo valor hay que averiguar). Las expresiones que están a ambos lados del igual son los miembros de la ecuación: *primer miembro* el de la izquierda, *segundo miembro* el de la derecha. Se denomina **solución** de una ecuación a un valor ó conjunto de valores de la incógnita (x), para los cuales se verifica la igualdad. Una ecuación puede tener ninguna, una o varias soluciones. Resolver una ecuación es hallar la ó las soluciones de la misma.

Ejemplo:

- o $x - 5 = 2$ Tiene única solución $x = 7$
- o $0x = 10$ No tiene solución (absurdo)
- o $0x = 0$ Tiene infinitas soluciones

Existen distintos tipos de ecuaciones:

Algebraicas:

- Racionales: la incógnita está afectada por las operaciones de suma, diferencia, potencia o cociente.

  Fraccionarias: La incógnita está en algún denominador. *Ejemplo*: $\frac{3x+1}{x^2+1} = 3$

  Enteras: La incógnita no está en ningún denominador: pueden ser lineales, cuadráticas, cúbicas, etc. *Ejemplo:* $3x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$

- Irracionales: son aquellas en las que la incógnita figura en el radicando. *Ejemplo:* $3.\sqrt{x+1} = 75$

Trascendentes:

- Logarítmicas: la incógnita está afectada por una función logarítmica. *Ejemplo:* $\log_2(x+2) = 5$
- Exponenciales: la incógnita está en un exponente. *Ejemplo*: $2^x + 4^{x+1} - 18 = 0$
- Trigonométricas: la incógnita está afectada por alguna función trigonométrica. *Ejemplo:* $2.\mathrm{sen}x - 1 = 0$

Ecuaciones de Primer Grado con una Incógnita

Para resolver este tipo de ecuaciones se usan las propiedades de las operaciones con números reales y **exclusivamente** dos operaciones elementales:

- Sumar a ambos miembros de la ecuación una expresión racional entera.
- Multiplicar ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero.

Ejemplo:

$6.(x - ½) = 2x - 1$

$6x - 3 = 2x - 1$ (propiedad distributiva)

$6x - 3 + 3 = 2x - 1 + 3$ (operación elemental: sumo a ambos miembros el 3)

$6x = 2x + 2$

$6x - 2x = 2x + 2 - 2x$ (operación elemental: sumo a ambos miembros -2x)

$4x = 2$

$4x \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4}$ (operación elemental: multiplico a ambos miembros por ¼)

$x = \frac{1}{2}$ (una solución única)

✐Ejercicio 17: Resuelve y verifica las siguientes ecuaciones en R:

a) $\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{3}{4}$

b) $-\frac{5}{3}x - 2 = \frac{2}{3}$

c) $2x + 1 = \frac{1}{3}x - 2$

d) $\frac{1}{2}\left(2x - \frac{4}{3}\right) = 3\left(5x + \frac{4}{3}\right)$

e) $-\frac{5}{4}x + 3 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}x$

f) $\frac{5x - 2}{2} = \frac{-3x + 4}{3}$

g) $\frac{1}{4}x - 5 = \frac{2}{3}x - 1$

h) $\frac{5x + 3}{2} = 9$

i) $\frac{2}{3}x + 0{,}5x = \frac{4}{3}x - 2$

j) $\frac{2x + 5}{4} = 2 + x$

k) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{x}{2}$

l) $\frac{x}{3} + \frac{3}{4} = \frac{x - 3}{2} + 1$

✐Ejercicio 18: Expresa en lenguaje simbólico las siguientes expresiones:

a) La mitad de un número: ....

b) Las tres cuartas partes de un número: ....

c) El doble de un número: ....

d) La suma de un número par con un número impar: ....

e) La mitad del cuadrado de un número: ....

f) El consecutivo de un número: ....

g) La suma de un número y su antecesor: ....

h) La mitad del consecutivo de un número: ....

i) El triple del consecutivo de un número: ....

j) Un tercio de la mitad de un número: ....

k) El doble de la quinta parte de un número: ....

l) El 15% de una cantidad de dinero: ....

Las ecuaciones permiten resolver problemas, teniendo en cuenta los siguientes pasos:

- lectura comprensiva del enunciado;
- traducción al lenguaje simbólico;
- expresión de la ecuación correspondiente;
- resolución de la ecuación;
- verificación del resultado obtenido.

Ejemplo: Resolver el siguiente problema:
De un depósito lleno de líquido se saca la cuarta parte del contenido; después la mitad del resto y quedan aún 1500 litros. Calcular la capacidad del depósito.

Resolución del problema:

• traducción al lenguaje simbólico	• capacidad del depósito: **x** • un cuarto del contenido: $\frac{1}{4}x$ • mitad del resto: $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}x\right)$ • quedan aún: **1500 litros**
• expresión de la ecuación correspondiente	$x=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)+1500$
• resolución de la ecuación	$x = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)+1500$ $x-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}x = 1500$ $\frac{3}{8}x = 1500$ $x = 1500 : \frac{3}{8}$ $x=4000$
• verificación del resultado obtenido	$x = \frac{1}{4}x+\frac{3}{8}x+1500$ $4000 = \frac{1}{4}4000+\frac{3}{8}4000+1500$ $4000 = 4000$

✐Ejercicio 19: Resuelve los siguientes problemas mediante el planteo de ecuaciones:

a) La cuarta parte de un número, disminuida en 2 unidades es 8. ¿Cuál es ese número?

b) Un número es tal que si se le suma su tercera parte, es igual al doble de su consecutivo. Calcula dicho número.

c) Calcula la altura de un rectángulo, sabiendo que su base es 5 cm y el área es 42,5 cm^2.

d) El precio total de un automóvil es de $19300, que se pagan mediante un anticipo de $2500 y 24 cuotas iguales. ¿A cuánto asciende cada cuota?

e) La suma de dos múltiplos consecutivos de 6 es 66. ¿Cuáles son dichos números?

f) Un niño tiene $1,80 y compra caramelos de $0,02 y $0,03 por partes iguales. Si además compró un chocolate de $0,60, ¿cuantos caramelos de cada clase compró?

g) Un padre de 42 años tiene 3 hijos de 9, 11 y 14 años.

¿Al cabo de cuánto tiempo la edad del padre será igual a la suma de las edades de sus hijos?

¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que la suma de las edades de los hijos duplique a la edad del padre?

h) Al repartir $460 entre 3 personas tales que la 2ª excede a la 1ª en $20 y la 3ª excede a la 2ª en $60, ¿cuánto dinero le toca a cada una?.

i) Un joven compra una cámara de video pagando $180 por adelantado y 6 cuotas fijas por un valor igual al 1/15 del precio total. Calcula el valor de la cámara.

j) Para comprar 6 disquetes, pago con $10 y me devuelven $3,10. ¿Cuánto cuesta cada disquete?

k) Para preparar un examen, Luis estudia durante 5 días seguidos, cada día 15 minutos más que el anterior. En total, siete horas y cuarto. ¿Cuánto estudió el primer día?

l) La diferencia entre un número y su consecutivo es 3. ¿Cuál es el número?

m) La diferencia entre un número y su consecutivo es 1. ¿Cuál es el número?

n) Mi hermana tiene $15 menos que yo, y mi hermano el doble que yo. Entre los tres sumamos $325. ¿Cuánto tiene cada uno?

o) Se han pagado $30 000 por una casa y un terreno. ¿Cuánto se abonó por cada uno, si el terreno cuesta las dos terceras partes de la casa?

p) Por una compra de supermercado se abonaron $150. Si sobre el total se hizo un descuento del 12% por pago contado, averigua cuál era el importe original de la compra.

INECUACIONES

Las inecuaciones son desigualdades entre dos miembros en los cuales hay por lo menos un dato desconocido, como se puede ver en la expresión, y que se verifican para determinados valores de ese dato desconocido o incógnita.

$$\underbrace{ax + b}_{\text{Primer Miembro}} < \underbrace{c}_{\text{Segundo Miembro}}$$

Resolver una inecuación implica hallar él o los valores de la incógnita que verifican dicha desigualdad. Al resolver una inecuación se encuentra un conjunto de valores que la verifican; este conjunto se llama **conjunto solución**.

¿Cómo se resuelve una inecuación?

Para resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizamos las mismas propiedades que en las ecuaciones, pero con la diferencia de que si **multiplicamos** (o dividimos) ambos miembros de una desigualdad por un **número negativo**, entonces la relación de **desigualdad se invierte**, es decir, cambia su sentido.

Con respecto al conjunto solución, al trabajar sobre el conjunto de los números reales también es posible expresar el conjunto solución mediante intervalos y representar el mismo sobre la recta numérica.

Ejemplo1:

$-8x - 3 > 5$

$-8x - 3 + 3 > 5 + 3$

Cambia el sentido de la desigualdad

$-8x > 8$

$-8x : (-8) < 8 : (-8)$

$x < -1$

$S = (-\infty\ , -1)$

Ejemplo 2:

$7x + 2 \geq 6$

$7x \geq 6 - 2$

$7x \geq 4$

$x \geq \dfrac{4}{7}$

$S = [4/7\ ;\ \infty)$

Ejemplo 3:

$$-2 \le 5x + 8 < 16$$
$$-2 - 8 \le 5x < 16 - 8$$
$$-10 \le 5x < 8 \qquad\qquad S = [-2 ; 8/5)$$
$$-\frac{10}{5} \le x < \frac{8}{5}$$
$$-2 \le x < \frac{8}{5}$$

✐<u>Ejercicio 20</u>: Encuentra el conjunto solución de las siguientes inecuaciones en R, represéntalo en la recta numérica y exprésalo como intervalo:

a) $3x - 5 \ge 1$ b) $-2x + 3 < 4$

c) $-5 < \frac{1}{2}x - 3 \le 1$ d) $3 \le -\frac{1}{3}x - 1 < 5$

e) $-3 < 3x \le 9$ f) $1 \le -3x + 2 \le 7$

<u>VALOR ABSOLUTO</u>

El valor absoluto de un número real a, es la distancia desde a hasta cero en la recta real. Lo simbolizamos $|a|$. La distancia es siempre positiva o cero, por lo tanto $|a| \ge 0$ para todo número real a.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

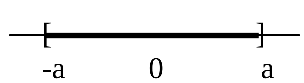
Ejemplos:

$$|3| = 3$$
$$|-5| = 5$$
$$|5 - 9| = |-4| = 4$$

<u>Inecuaciones con valor absoluto</u>

Para resolver inecuaciones con valor absoluto debemos tener en cuenta las siguientes propiedades:

<u>Propiedad 1</u>: $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$



S = [-a ; a]

Ejemplo 1:

$$|x-2| \leq 3$$
$$-3 \leq x-2 \leq 3$$
$$-3+2 \leq x \leq 3+2$$
$$-1 \leq x \leq 5$$

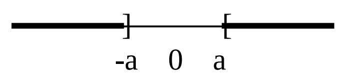
S = [-1; 5]

Ejemplo 2:

$$3+|x+5| < 6$$
$$|x+5| < 6-3$$
$$|x+5| < 3$$
$$-3 < x+5 < 3$$
$$-3-5 < x < 3-5$$
$$-8 < x < -2$$

S = (-8 ; -2)

<u>*Propiedad 2*</u>: $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$



S = $(-\infty;-a] \cup [a ; \infty)$

Ejemplo:

$$|x+3| \geq 1$$
$$x+3 \leq -1 \quad \vee \quad x+3 \geq 1$$
$$x \leq -1-3 \quad \vee \quad x \geq 1-3$$
$$x \leq -4 \quad \vee \quad x \geq -2$$

S = $(-\infty;-4] \cup [-2 ; \infty)$

✐<u>Ejercicio 21</u>: Encuentra el conjunto solución de las siguientes inecuaciones con valor absoluto, represéntalo en la recta numérica y exprésalo como intervalo:

a) $|2x-3| \leq 1$

b) $\left|\frac{1}{4}x+2\right| < 2$

c) $|-2x+5| < 3$

d) $|x-2| > 0$

e) $|4x-1| \geq 7$

f) $3+|x+1|+2 < 4$

g) $-2.|x+1| \leq -5$

h) $|3-4x|-11 > -6$

NÚMEROS COMPLEJOS

Como ya se sabe, existen algunas ecuaciones de segundo grado que no tienen ninguna solución real. Tal es el caso de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Si bien esto no era un problema excesivamente grave en la época en que se observó, un ingenioso método ideado por Gerolamo Cardano (1501-1576) para la resolución de las ecuaciones de tercer grado precisaba resolver cualquier tipo de ecuaciones de segundo grado, para su aplicación.

Esto dio lugar a que se admitieran también las raíces cuadradas de los números negativos llamándolas “números imaginarios”. Casi un siglo tuvo que pasar para que se hiciese un estudio completo de los mismos, llegándose a lo que hoy se llama el cuerpo de los números complejos.

Un número complejo se representa en forma binomial como:

$$\mathbf{Z = a + bi}$$

La parte real del número complejo y la parte imaginaria, se pueden expresar como se muestra a continuación:

a = Re(Z) (parte real)

b = Im(Z) (parte imaginaria)

Se llama unidad imaginaria a un ente abstracto i, al que se le atribuye la propiedad de que su cuadrado es -1:

$$\mathbf{i^2 = -1}$$

Si un número complejo tiene una de sus partes (real o imaginaria) igual a cero, ésta no suele escribirse. Así, se escribirá **a** en lugar de **a + 0.i** y también **b.i** en lugar de escribir **0+b.i.**

Se puede considerar que los números reales son los números complejos cuya parte imaginaria es 0. Los números complejos cuya parte real es 0 suelen recibir el nombre de imaginarios puros.

Operaciones de Números Complejos en la Forma Binómica

- **Suma y diferencia de números complejos**

La suma y diferencia de números complejos se realiza sumando y restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí.

$$\textbf{Suma: } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\textbf{Resta: } (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo:

$$(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) = (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i = \mathbf{-7 + 7}i$$

- **Multiplicación de números complejos**

El producto de los números complejos se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que $\mathbf{i^2 = -1}$.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo:

$$(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) = 10 - 15i + 4i - 6\,i^2 = 10 - 11i - 6.(-1) = 10 - 11i + 6 = \mathbf{16 - 11}i$$

- **División de números complejos**

El cociente de números complejos se hace racionalizando el denominador; esto es, multiplicando numerador y denominador por el conjugado de éste.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)}{(c+di)} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)} = \frac{(a.c+b.d)+(b.c-a.d)i}{c^2-d^2.i^2} = \frac{a.c+b.d}{c^2+d^2} + \frac{b.c-a.d}{c^2+d^2}i$$

Ejemplo:

$$\frac{3+2i}{1-2i} = \frac{(3+2i)}{(1-2i)} \cdot \frac{(1+2i)}{(1+2i)} = \frac{3+6i+2i+4i^2}{1^2-(2i)^2} = \frac{3+8i-4}{1+4} = -\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

✐Ejercicio 22: Resuelve las siguientes operaciones en el conjunto C de los números complejos:

a) $(-2+i).(3-4\,i) =$

b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right) =$

c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right) =$

d) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)^2 =$

e) $(3 - 2i\,)^3 =$

f) $\frac{5+2i}{3-i} =$

g) $(2 + 4i) + (3 - 2i) - 2.(-4 + 7i) =$

h) $(5 - 4i) - (-3 + 2i) + \frac{1}{2}.(6 - 4i) =$

i) $(4 + 2i).(5 - 3i) =$

j) $(1 - i)^2 =$

k) $(2 + 5i)^3 =$

l) $\frac{3-3i}{-2+5i} =$

m) $\frac{1+3i}{3-i} =$

n) $\frac{(2+2i).(3-i)}{1-i}+(2+3i) =$

o) $\frac{(-2i)^2.(4-2i)}{1-5i} =$

AUTOEVALUACIÓN N°1: CONJUNTOS NUMÉRICOS

1) Marca con una cruz las afirmaciones correctas.

Todo número real es un número racional.	( )
Todo número entero es racional.	( )
Todo número irracional es un número real.	( )
Todo número entero es natural.	( )
Todo número real es un número racional o irracional.	( )
Entre dos números enteros existen infinitos números enteros.	( )
Entre dos números racionales existen infinitos números racionales.	( )

(14 puntos)

2) Cada uno de los siguientes ítems tiene cuatro respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Enciérrala o márcala con una cruz.

2.1) $\left(2^2x^4\right)\cdot\left(2x^3\right)^5$ es igual a:

a) $2^7\,x^{19}$ b) $2^7\,x^{12}$ c) $2^{10}\,x^{60}$ d) ninguna es correcta

2.2) Al resolver $\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$ se obtiene:

a) $-4\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) 0 d) ninguna es correcta

2.3) El resultado de $[-2;1]\cap(0;2)$ es:

a) $[-2;2]$ b) $(0;1)$ c) $(0;1]$ d) ninguna es correcta

2.4) El resultado de $\left[\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot 0{,}333\ldots\right]\cdot 5$ es:

a) un número real b) un número natural c) un número entero d) ninguna es correcta

2.5) El resultado de 0^{-4} es:

a) -1 b) 0 c) 1 d) ninguna es correcta

2.6) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}$ es igual a:

a) $\sqrt{a\cdot b}$ b) $(a\cdot b)^0-\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a\cdot b}}$ d) ninguna es correcta

2.7) Sea A = $\{x\ /\ x\in R \wedge |\,x\,| \leq 2\}$, entonces A es igual al conjunto:

a) {0; 1; 2} b) {0; 1; 2; -1; -2} c) [-2 ;2] d) ninguna es correcta

2.8) El intervalo solución de $[-1;4) \cap (-\infty;0] - \left[-\frac{1}{2};0\right]$ es:

a) $\left[-1;-\frac{1}{2}\right)$ b) [-1 ;0] c) $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ d) ninguna es correcta

2.9) Al realizar el producto $\left(-2+\frac{1}{4}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}i\right)$ se obtiene:

a) $\left(-2+\frac{3}{20}i\right)$ b) $\left(\frac{11}{5}+\frac{3}{20}i\right)$ c) $\left(-1-\frac{3}{20}i\right)$ d) ninguna es correcta

2.10) El resultado de $2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$ es igual a:

a) $\sqrt[6]{2^5}$ b) $\sqrt[6]{4^5}$ c) $\sqrt[6]{2}$ d) ninguna es correcta

2.11) El resultado de $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)^2$ es:

a) -10 b) -2 c) 2 d) ninguna es correcta

2.12) El conjunto solución de la inecuación $\frac{1}{2}x+3 \le x-1$ es:

a) $(-\infty;8]$ b) $[-8;\infty)$ c) $[8;\infty)$ d) ninguna es correcta

(48 puntos)

3) Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ ( )

b) $-(5+2)^2=49$ ( )

c) $\sqrt{5}+3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ ( )

d) $0{,}2777.... = \frac{2}{9}$ ( )

e) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ( )

f) $1{,}5838383...... = \frac{784}{495}$ ( )

g) $3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{9}$ ( )

h) $2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ( )

i) $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)}=a+b$ ( )

j) $\sqrt{-16}=\pm 4$ ( )

(20 puntos)

4) Resuelve los siguientes problemas:

a) En la Facultad de Ciencias Aplicadas ingresan 220 alumnos en las carreras de Ingeniería, Bromatología y Profesorado. Los que ingresan al Profesorado son las dos terceras partes de los de Ingeniería y los de Bromatología, el doble de los inscriptos en Ingeniería. Halla cuántos alumnos hay inscriptos por carrera.

b) La tercera parte de un número menos cinco es igual al duplo de dicho número. ¿Cuál es ese número?

c) Un terreno se remata dividido en 36 lotes iguales. Se presentaron sólo tres interesados: el primero adquirió un cuarto del terreno total; el segundo, un tercio y el tercero, dos novenos. ¿Cuántos lotes adquirió cada uno?. ¿Cuántos lotes quedaron sin vender?

(18 puntos)

MÓDULO 2

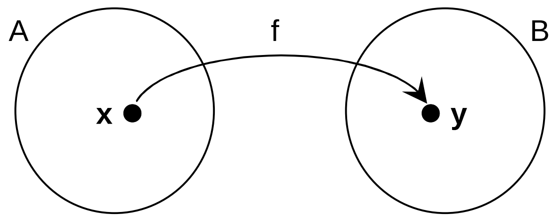
FUNCIONES

Las **funciones** son probablemente uno de los conceptos más importantes de la matemática actual ya que es una herramienta muy valiosa para *describir, analizar, sacar conclusiones e interpretar diversas situaciones de otras ciencias o de la matemática misma a través de gráficos, tablas y fórmulas.*

Sean A y B subconjuntos de IR.

Cuando existe una relación entre las variables **x** e **y**, donde **x**$\in$ A e **y**$\in$ B, en la que a cada valor de la **variable independiente x**, le corresponde un *único* valor de la **variable dependiente y**, diremos que dicha relación es una **función**.

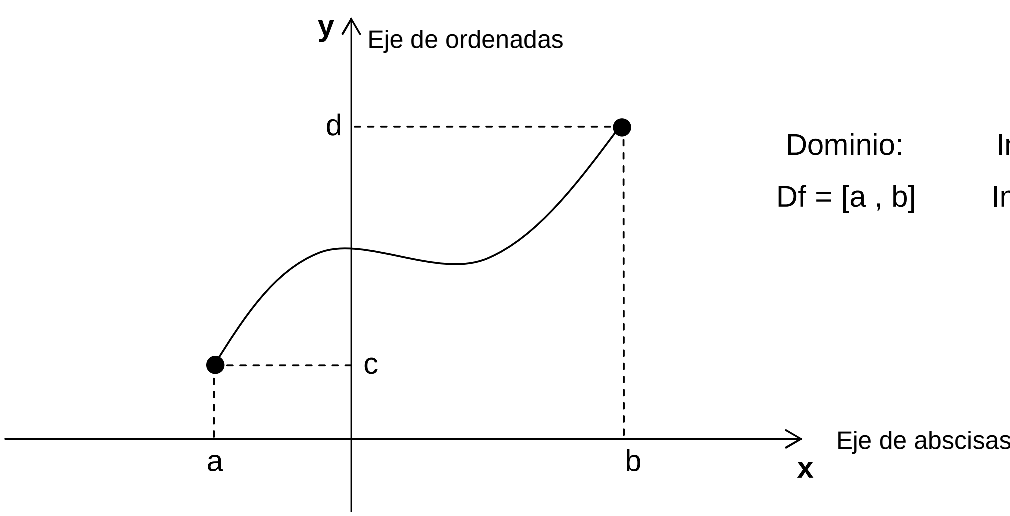
$f : A \rightarrow B$



Diremos que **y** es la imagen de **x** por la función **f**, en símbolos y = f(x).

*Una relación entre dos conjuntos, es una función si se cumple la condición de existencia (cada elemento de **A** tiene imagen) y la de unicidad (una única imagen).*

Una forma de representar una función es mediante una gráfica en un **plano de coordenadas cartesianas.**



Dominio: Df = [a , b]

Imagen: Imf = [c , d]

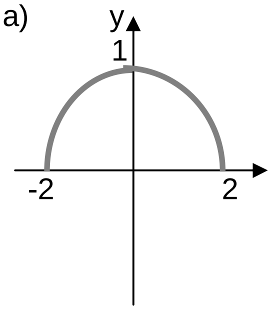
Al conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente **x** lo denominamos **dominio** de la función y lo denotamos Df o Domf.

Al conjunto formado por todos los valores que toma la variable dependiente **y** tales que y=f(x) para algún **x**∈ A, lo denominamos **imagen** de la función y lo denotamos Imf.

Para una función f : A → B, se tiene que A = Domf e Imf ⊆ B

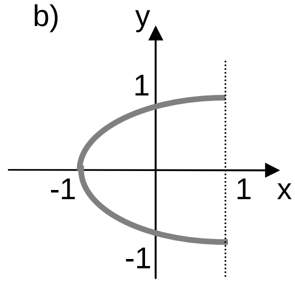
✐Ejercicio 1: Indica cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones de A en B:

a)



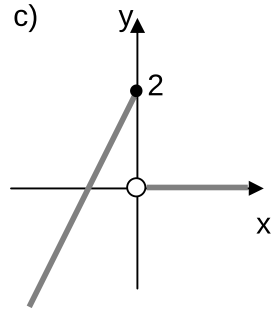
A = [-2 ; 2]

b)



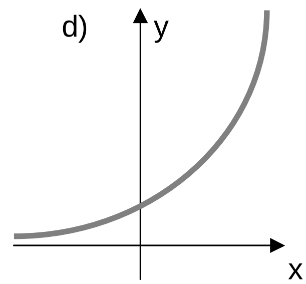
A = [-1 ; 1]
B = [-1 ; 1]

c)



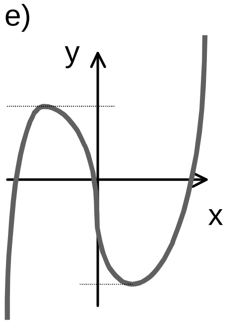
A = R
B = R

d)



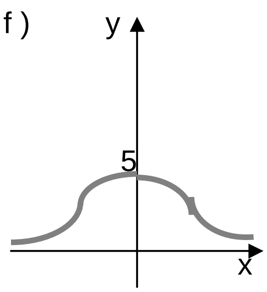
A = R
B = R

e)



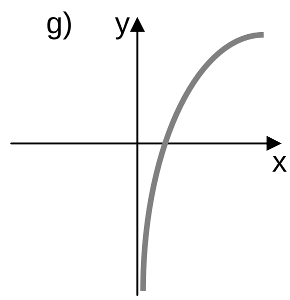
A = R
B = R

f)



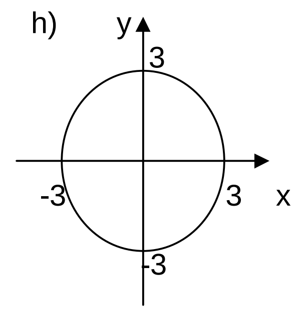
A = R
B = R

g)



A = R
B = R

h)



A = [-3 ; 3]
B = [-3 ; 3]

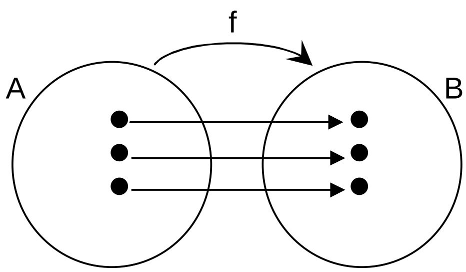
CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

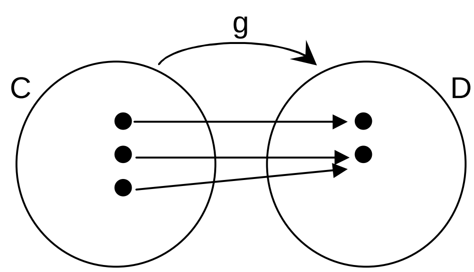
Si observamos detenidamente cada una de las siguientes funciones podemos señalar que:

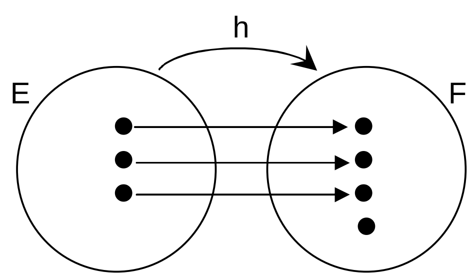
En el caso de la función f: A → B, a cada elemento del dominio le corresponde una imagen distinta y el conjunto imagen coincide con el conjunto de llega.

Al analizar la función g: C → D, vemos que existen elementos del dominio a los que le corresponde una misma imagen y en este caso el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada.

Si estudiamos la función h: E → F visualizamos que a cada elemento del dominio le corresponde una imagen distinta y que el conjunto de las imágenes está incluido en el conjunto de llegada.







A partir de estas observaciones, surge la siguiente clasificación de las funciones:

Función suryectiva: Una función es suryectiva cuando el conjunto imagen es igual al conjunto de llegada. **(f** y **g)**

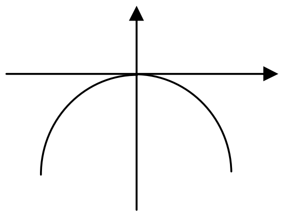
Función inyectiva: Una función es inyectiva o uno a uno, cuando a elementos distintos del dominio le asigna distintas imágenes. **(f** y **h)**

Función biyectiva: Una función es biyectiva cuando es suryectiva e inyectiva simultáneamente. **(f)**

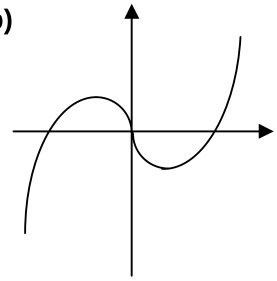
✐Ejercicio 2: Define el conjunto imagen de las funciones del Ejercicio 1 y clasifícalas en inyectivas, suryectivas y/o biyectivas.

✐Ejercicio 3: Clasifica las siguientes funciones de IR en IR, dadas por sus gráficos e indica cuáles admiten función inversa:

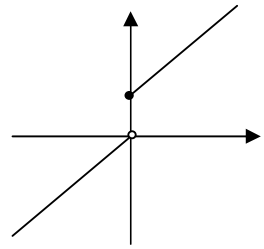
a)



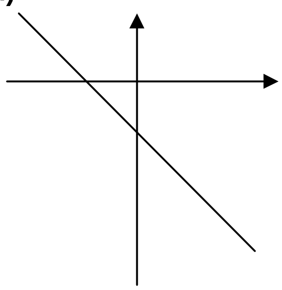
b)



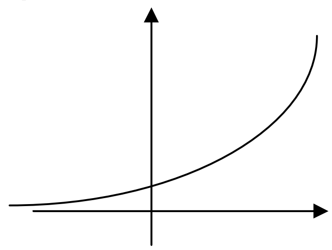
c)



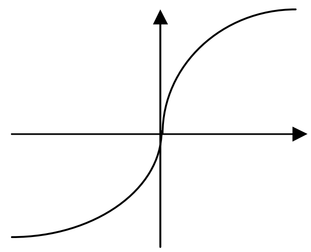
d)



e)



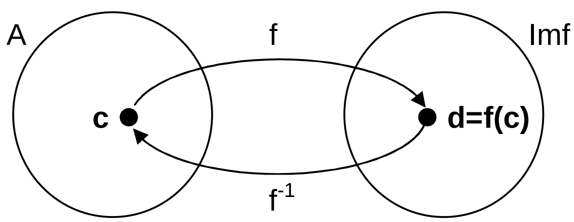
f)



FUNCIÓN INVERSA

Si una función es biyectiva, podemos realizar un camino de vuelta y asignar a cada elemento del conjunto imagen un único elemento del dominio del que provino.

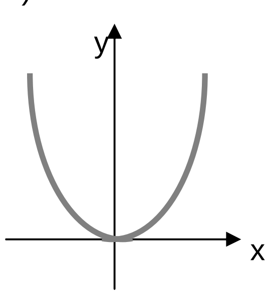
Esta asignación da como resultado una función que llamamos función inversa y notamos como f^{-1}. El dominio de f^{-1}, será el conjunto imagen de f y el conjunto imagen de f^{-1} coincide con el dominio de f.



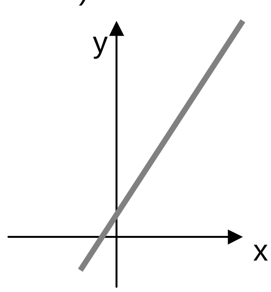
$f^{-1}(d) = c$ si y solo si $f(c) = d$

✐Ejercicio 4: Indica cuáles de las siguientes funciones, dadas por sus gráficos, admiten inversa:

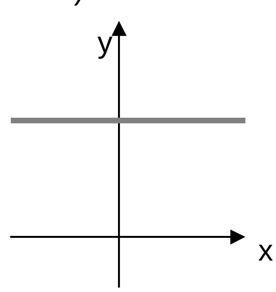
a) $f : R \to R$



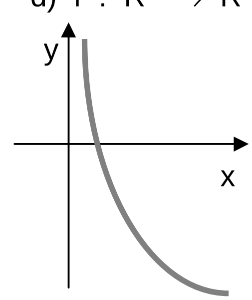
b) $f : R \to R$



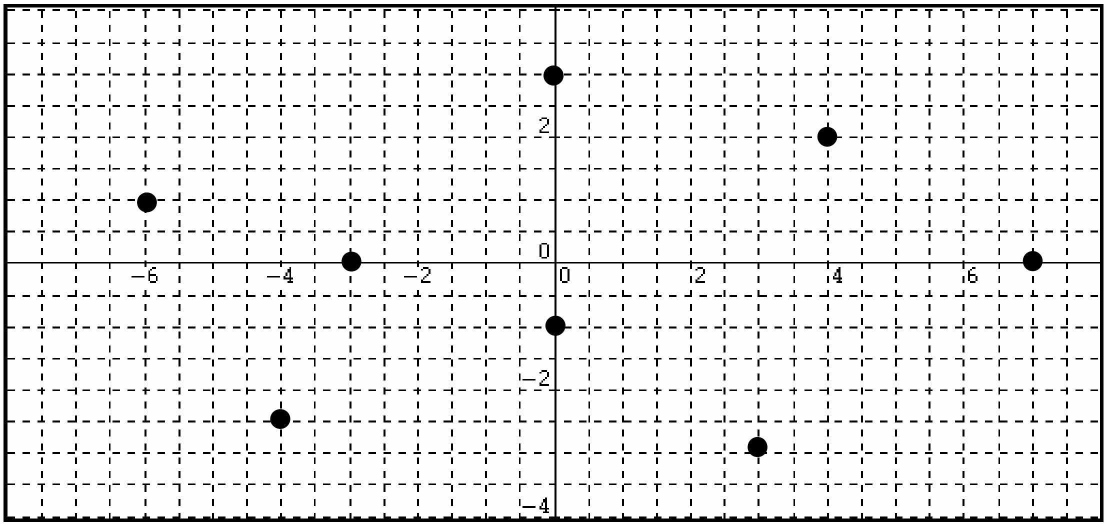
c) $f : R \to R$



d) $f : R^+ \to R$



✐Ejercicio 5: Indica las coordenadas de los puntos señalados en el siguiente gráfico:



✐Ejercicio 6: Los puntos (-2;5) y (4;-1) son vértices de un cuadrado de lados paralelos a los ejes coordenados. Encuentra los otros dos vértices. Representa gráficamente.

FUNCIÓN AFÍN

Es de la forma:

$$f : R \rightarrow R \ / \ f(x) = mx + b \text{ (Ecuación explícita de la recta)}$$

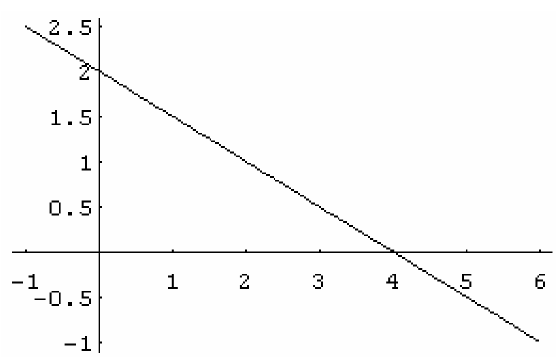
m y **b** $\in$ R

La representación gráfica de una función afín es una RECTA.

m: es la pendiente (inclinación) = $\frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

b: es la ordenada al origen (gráficamente es el punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas)

Ejemplo: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$



*La recta corta a los dos ejes. El punto de intersección de la recta con el eje de las ordenadas, **y**, es el punto (0,2), por lo tanto su ordenada al origen es 2. El punto de intersección de la recta con el eje de las abscisas, **x**, es el punto (4,0), por lo tanto su cero o raíz es 4.*

Ceros o Raíces de la función:

Es el valor de **x** tal que f(x)=0, es decir, el cero de una función afín es, gráficamente, el punto de intersección (si existe) entre la recta y el eje de abscisas. Para obtener el cero o raíz de una función, debemos igualar a cero la función y resolver la ecuación correspondiente.

Ejemplo:

$$y = 2x - 9$$
$$2x - 9 = 0$$
$$2x = 9$$
$$x = \frac{9}{2}$$

Cero o raíz de la función

Casos especiales de la función afín:

- Función Constante: m = 0 y b ≠ 0 → **y = b**

  La gráfica de esta función es una recta paralela al eje de abscisas, por lo tanto, no corta al eje de las **x**, esto implica que la función no tiene ceros o raíces.

- Función Lineal: m ≠ 0 y b = 0 → **y = mx**

  La recta corta al eje de abscisas en x=0, por lo tanto, el cero o raíz de la función es único (x=0).

- Función Nula: m = 0 y b = 0 → **y = 0**

  La intersección de la recta con el eje de las abscisas es el mismo eje **x**, por lo tanto, los ceros o raíces de la función son infinitos.

✐Ejercicio 7: Para cada una de las siguientes funciones afines de IR en IR:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ b) $f(x) = -3x + 2$

c) $f(x) = -2$ d) $f(x) = \frac{1}{4} - x$

e) f(x) = $2x$

f) f(x) = $-\frac{1}{2}x + 3$

g) f(x) = $3x$

h) f(x) = 3

i) f(x) = $\frac{2}{3}x - 6$

7.1) Indica la pendiente y la ordenada al origen.

7.2) Represéntalas gráficamente.

7.3) Calcula, si es posible, su cero o raíz y verifícalo gráficamente.

7.4) Clasifícalas y encuentra la función inversa en los casos posibles.

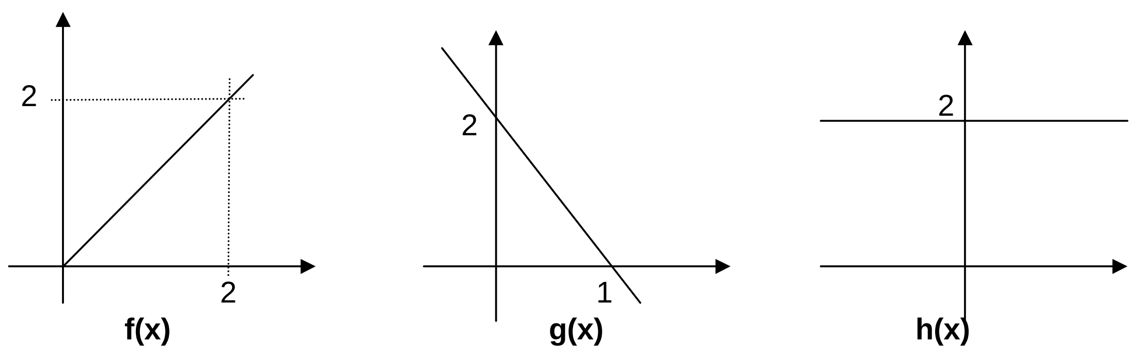
✐Ejercicio 8: Encuentra las intersecciones con los ejes de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente.

a) $2x - 3y = 6$

b) $3x + y + 6 = 0$

c) $3x - y + 3 = 0$

✐Ejercicio 9: Observa las siguientes gráficas para contestar los ítems que siguen:



9.1) Une con flechas, según corresponda:

La función f(x) tiene pendiente	nula
La función g(x) tiene pendiente	positiva
La función h(x) tiene pendiente	negativa

9.2) Encierra la respuesta correcta:

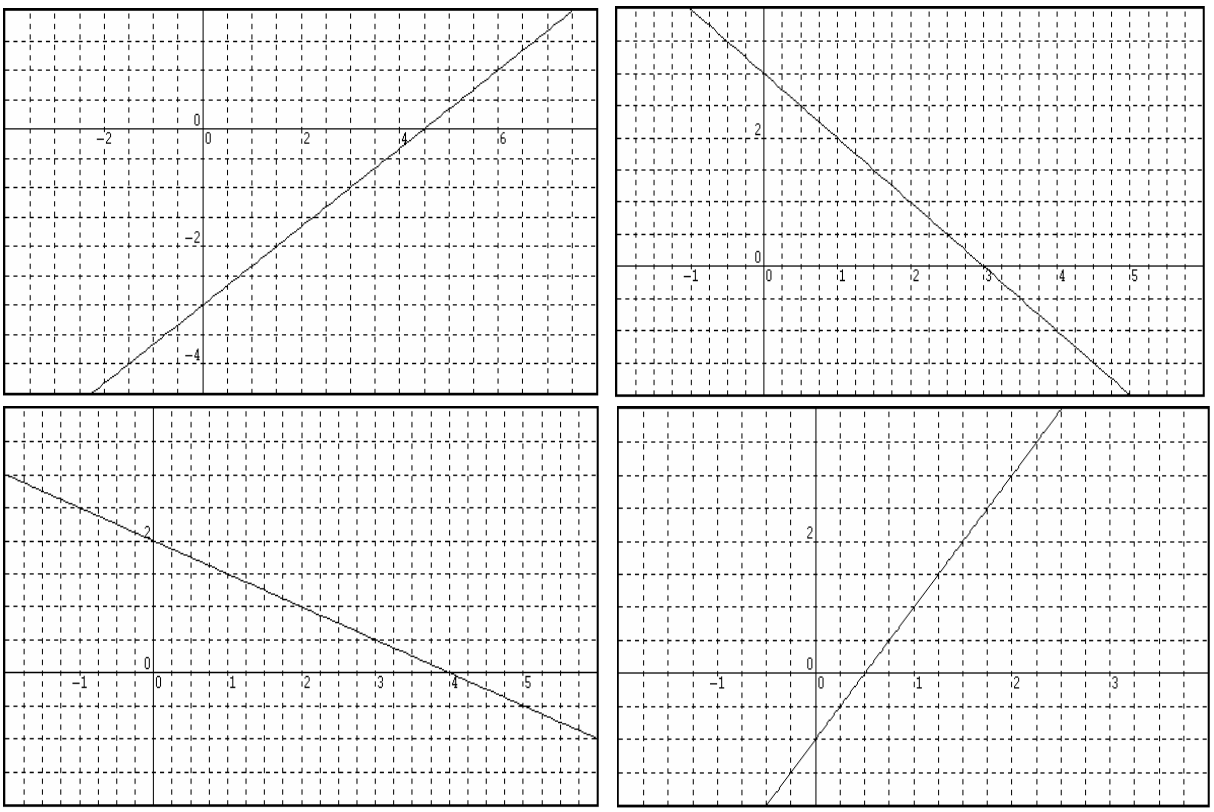
Las funciones que tienen la misma ordenada al origen son:

a) f(x) y g(x) b) f(x) y h(x) c) h(x) y g(x)

9.3) Encierra la fórmula correspondiente en cada caso:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} 2x \\ -x \\ \frac{1}{2}x \\ \text{ninguna} \\ \text{de estas} \end{cases} \qquad \mathbf{g(x)} = \begin{cases} x+2 \\ -2x+2 \\ 2x+2 \\ \text{ninguna} \\ \text{de estas} \end{cases} \qquad \mathbf{h(x)} = \begin{cases} x \\ 2x \\ 2 \\ \text{ninguna} \\ \text{de estas} \end{cases}$$

✐Ejercicio 10: Encuentra la fórmula de las siguientes funciones afines dadas por sus gráficos:



✐Ejercicio 11: El siguiente gráfico muestra la carrera de un ladrón y un policía que trata de alcanzarlo:

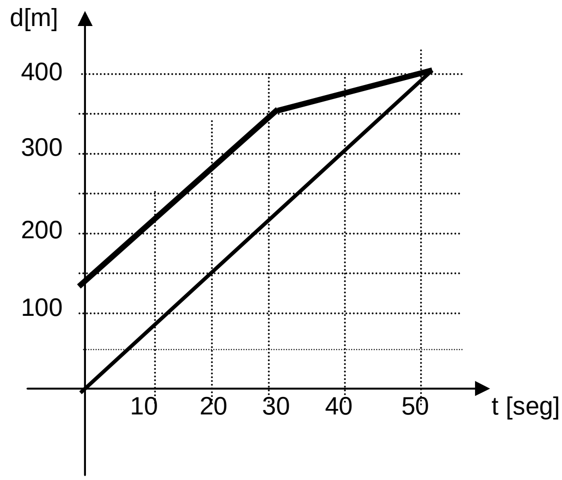
a) ¿Cuál es la gráfica correspondiente a cada uno?

b) ¿A qué distancia estaba el policía del ladrón cuando empezó la persecución?

c) El policía tira un disparo que roza la pierna del ladrón. ¿En qué instante sucede?

d) ¿Logra el policía alcanzar al ladrón? ¿En que instante?

e) ¿Durante cuánto tiempo corren a la misma velocidad?



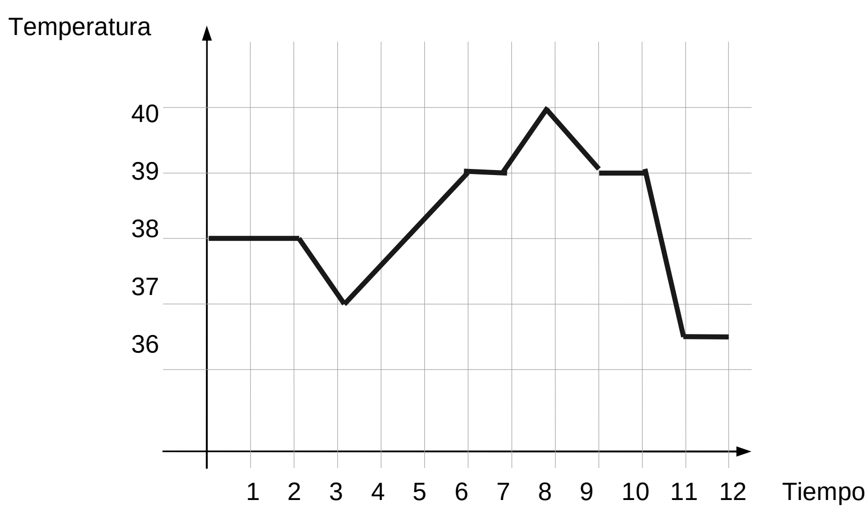
✐<u>Ejercicio 12</u>: El siguiente gráfico representa la evolución de la temperatura de un enfermo durante doce días. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué días ha tenido el enfermo una temperatura constante?

b) ¿En qué días subió la temperatura? ¿En qué días descendió?

c) ¿Qué día alcanzó la temperatura máxima? ¿Y la mínima?

d) La enfermera suministró un antifebril los días en que la temperatura fue superior a los 38ºC. ¿Qué días tomó el enfermo las pastillas?



✐<u>Ejercicio 13</u>: El siguiente gráfico muestra la variación de temperatura de un alimento en función del tiempo transcurrido desde que fue sacado de la heladera. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿A qué temperatura fue retirado de la heladera?

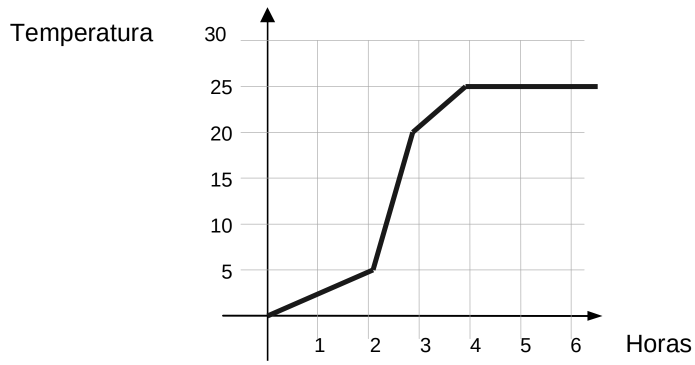
b) ¿Cuánto tiempo transcurrió hasta que alcanzó 20º C?

c) ¿Durante qué hora aumentó más rápidamente la temperatura?

d) ¿A qué hora disminuyó la temperatura?

e) ¿A partir de qué hora mantuvo la temperatura constante?

f) ¿Qué temperatura alcanzó al finalizar la segunda hora?



SISTEMAS DE ECUACIONES

Dos o más ecuaciones de primer grado con el mismo número de incógnitas, consideradas simultáneamente, reciben el nombre de sistema de ecuaciones lineales.

Por ejemplo, dos ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

donde a, b, c, d, f son números reales, constituyen un sistema de ecuaciones lineales, en este caso de dos ecuaciones con dos incógnitas. Todo par de valores de x e y que satisfaga a ambas ecuaciones simultáneamente, recibe el nombre de solución del sistema. Entonces, S_0 es una solución del sistema de ecuaciones si y sólo si S_0 satisface cada una de las ecuaciones del sistema.

Resolver un sistema de ecuaciones, consiste en hallar todos los valores de las incógnitas que satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones, ó concluir que no tiene solución.

El par $(x_0;y_0)$ es solución del sistema: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ si al reemplazar x por x_0 e y por y_0

ambas ecuaciones se transforman en identidades numéricas.

Ejemplo 1: Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$$

(-1;1) es solución del sistema pues: $2(1) – 3(-1) = 5$

$$1 + 4(-1) = -3$$

(4;1) no es solución del sistema pues: $2(4) – 3(1) = 5$

$$4 + 4(1) = 8 \neq -3$$

Para indicar simbólicamente que un sistema de ecuaciones lineales tiene dos ecuaciones y dos incógnitas, lo expresamos como SEL 2 x 2. Son los únicos que veremos en este curso. En Álgebra de la facultad, verás los SEL con m ecuaciones y n incógnitas.

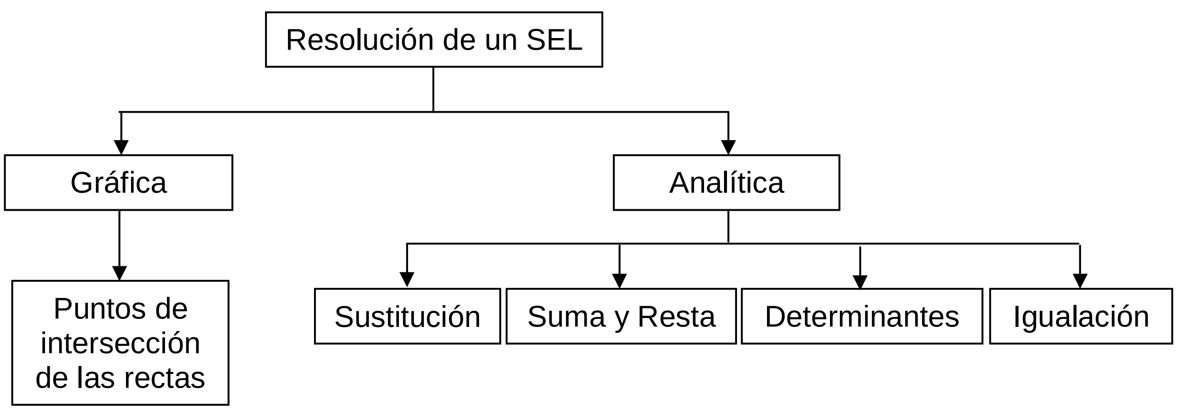
¿Qué significa resolver un sistema?

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar la intersección de los conjuntos soluciones de las ecuaciones que lo forman.

El conjunto solución de cada una de las ecuaciones que forman el sistema es una recta, por lo tanto, hallar la solución del sistema es hallar, si existen, el o los puntos de intersección de ambas rectas.

¿De cuántas maneras se puede resolver?

Un sistema de ecuaciones puede resolverse analítica o gráficamente.



¿Qué puede ocurrir?

Puede ocurrir que el sistema tenga:

Única solución → Sistema compatible ó consistente determinado

Infinitas soluciones → Sistema compatible indeterminado

No tenga solución. El conjunto solución es vacío → Sistema incompatible ó inconsistente

¿Cómo se expresa la solución de un sistema?

Se expresa como un conjunto ordenado de las incógnitas. Para indicar que el conjunto solución S es ordenado, se escriben las incógnitas entre paréntesis:

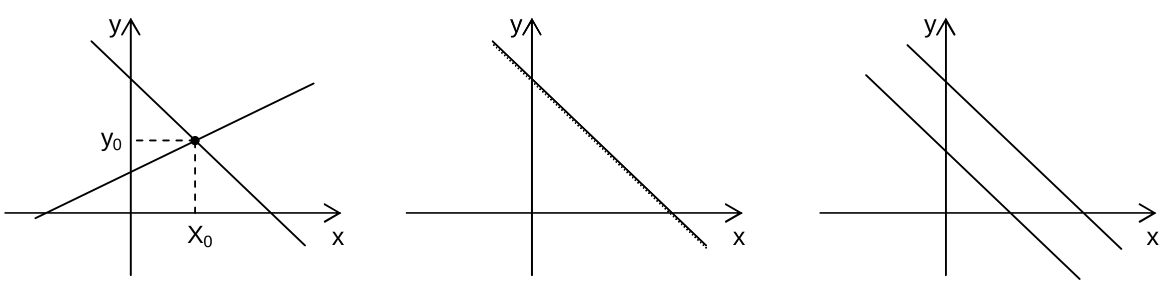
$S = \{(x_1; x_2)\}$ o $S = \{(x; y)\}$

¿Cómo resuelvo aplicando el método gráfico?

Aunque el método gráfico es un gran auxiliar para comprender los tres anteriores tipos de sistemas de ecuaciones de primer grado, no es sin embargo un método eficaz para obtener la solución, cuando ésta existe. En primer lugar, es excesivamente laborioso. En segundo lugar (y más importante), la exactitud del método depende de la habilidad del operador para construir las gráficas de las dos ecuaciones y para estimar las coordenadas del punto de intersección cuando éste es visible.

Si observas y analizas los siguientes gráficos de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, coincidimos que en a) La solución del sistema es única, debido a que las rectas se cortan en un único punto (x_0,y_0), en b) al coincidir una recta con la otra, existen infinitas soluciones porque se cortan en infinitos puntos, y por último en c) al ser rectas paralelas no coincidentes, no se cortan en ningún punto, por lo tanto el sistema no tiene solución.

a) b) c)



$S = \{(x_0;y_0)\}$ $S = \{(x_0;m.x_0+b)\}$ $S = \{\ \}$

Podemos concluir entonces que hay sólo tres casos posibles:

a) Las rectas se cortan en un punto. El sistema tiene solución única (x_0,y_0). El par (x_0,y_0) es el único punto de intersección de las rectas.

b) Las rectas son coincidentes. El sistema tiene infinitas soluciones. Los infinitos pares de coordenadas de los puntos de la recta son soluciones del sistema.

c) Las rectas son paralelas. Las rectas no tienen puntos en común. El sistema no tiene solución.

A continuación se muestra un cuadro resumen de los tipos de sistemas y la solución de cada uno:

Tipo de sistema	**Tipo de solución**	**Representación Gráfica**
Compatible determinado	Solución única	Rectas que se cortan
Compatible indeterminado	Infinitas soluciones	Rectas paralelas coincidentes
Incompatible	No tiene solución	Rectas paralelas (no coincidentes)

Hay métodos analíticos que son muy fáciles de operar y permiten además obtener con absoluta exactitud la solución, cuando ésta existe. Estudiaremos a continuación los cuatro (4) más conocidos: reducción por suma o por resta, sustitución, Igualación y determinantes.

Métodos analíticos de resolución de sistemas

Método de sumas y restas

Este método consiste en procurar que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones para que, al restarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la otra incógnita. Se resuelve dicha ecuación y el valor de la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones primitivas, y con ello se puede obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: analiza

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

Se restan miembro a miembro las dos ecuaciones del sistema, y se obtiene: $3y = 3$, entonces $y=1$. Se sustituye el valor de ***y*** en una de las ecuaciones iniciales, entonces $x=0$ y la solución $S = \{(0;1)\}$

Otro procedimiento: Se multiplican los dos miembros de la primera ecuación por 2 con el fin de que el coeficiente de la ***y*** sea el mismo (con signo contrario) en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

Ahora, sumando miembro a miembro se obtiene la ecuación siguiente:

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$

Y se sustituye en una de las ecuaciones iniciales:

$0 + y = 1 \Rightarrow y = 1$

La solución es $x = 0$, $y = 1 \Rightarrow S = \{(0;1)\}$

Método de sustitución

Este método consiste en despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y reemplazar la expresión de la misma en la otra ecuación. De esta forma, se obtiene una ecuación con una sola incógnita, que se puede resolver. Una vez conocido el valor de dicha incógnita se obtiene, de inmediato, el valor de la otra.

Ejemplo: analiza:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

por el método de sustitución conviene despejar la y de la primera ecuación:

$y = 1-x$

Ahora se sustituye esta expresión en la segunda ecuación del sistema:

$x-2(1-x) = -2$

Se resuelve la ecuación resultante, pues sólo tiene una incógnita:

$x-2+2x = -2 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$

Ahora el valor de x se sustituye en la expresión de ***y*** obtenida antes:

$y = 1-0 \Rightarrow y = 1$

Entonces, la solución está dada por: $x = 0$, $y = 1 \Rightarrow S = \{(0;1)\}$

Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus expresiones, obteniendo así una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta se obtiene fácilmente el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: Para resolver por igualación el sistema anterior:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

se puede despejar la x en ambas ecuaciones e igualar sus expresiones:

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ x = -2 + 2y \end{cases}$$

$\Rightarrow 1 - y = -2 + 2y \quad \Rightarrow \quad -3y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

Por último se sustituye el valor de y en alguna de las expresiones de x:

$x = 1 - 1 = 0$

La solución es: $x = 0$, $y = 1 \Rightarrow S = \{(0;1)\}$

Método de determinantes

Para poder aplicar este método es buena idea comenzar con una explicación sobre cómo calcular los determinantes.

Si a,b,c y d son cuatro números reales, a la expresión

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ se le llama un determinante 2 x 2.

El determinante es un número que se obtiene con la expresión a.d – b.c. Es decir, multiplicamos en forma cruzada y restamos los productos. Es importante que lleves a cabo la multiplicación como se ilustra.

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$

Ejemplo: ¿Cuál es el determinante para la matriz siguiente?

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Observa el procedimiento para hallar el determinante.

La resta siempre va acá

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 6.(-2) = 15$$

Resumes este proceso de la siguiente forma: primero se multiplican los números que quedan en la diagonal de izquierda arriba a derecha abajo. Luego a este resultado se le resta el producto de los números en la diagonal de izquierda abajo a derecha arriba.

¿En qué consiste el método de determinantes?

En forma general:

La solución para el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases}$$

esta dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

siendo:

$$\Delta_X = \begin{bmatrix} s & b \\ t & d \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_Y = \begin{bmatrix} a & s \\ c & t \end{bmatrix}$$

siempre que lo siguiente ocurra:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c \neq 0$$

Finalmente, se concluye que si $\Delta \neq 0$, entonces

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Cada incógnita es igual al cociente entre su determinante y el determinante del sistema

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x + y = 13 \end{cases}$$

Halla primero el determinante de los coeficientes de las incógnitas x e y. Lo llamas el determinante principal y lo nombras con un Δ. Si este determinante es distinto de cero, el SEL es compatible determinado y por lo tanto tiene solución única.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - 6.(-2) = 15 \neq 0 \qquad \Rightarrow \text{Existe solución única}$$

Observa que el determinante de la matriz de coeficientes nos dio 15.

Se forman los determinantes de las incógnitas, Δx y Δy reemplazando la columna de la incógnita que se quiere calcular, por los términos independientes y dejando la otra columna sin modificar.

Observa el procedimiento para hallar el valor del determinante para la variable x (Δx).

Remplaza la columna de coeficientes de la variable x con los valores de los términos independientes. Observa a continuación el proceso:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}=4.1-13.(-2)=14+26=30$$

Para hallar el valor de x, divides el valor determinado Δx por el determinante principal Δ. Es decir, calcula

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{15}{30}=0{,}5$$

Ahora observa cómo hallas el valor de y.

Δy se calcula con el determinante

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 13 \end{vmatrix}=3.13-6.4=29-24=15$$

Fíjate que en este determinante cambias la segunda columna por los términos independientes.

Para hallar el valor de y divides el valor hallado para Δy por el determinante principal Δ. Es decir, calculas

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{15}{15}=1$$

Concluyes que la solución del sistema es S= {(0,5;1)}. Esto significa que las dos rectas representadas por las ecuaciones originales se intersecan en el punto con coordenadas (0,5;1). Recuerda que si el sistema resulta en rectas que se intersecan lo llamas Compatible Determinado.

Reflexiona: ¿Qué ocurre si el determinante del sistema es cero?

✐Ejercicio 14: Resuelve gráfica y analíticamente los siguientes sistemas, indica si son compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

a) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-y=9 \\ x-\dfrac{1}{3}y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2y=-3 \\ -4x+5y=11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 2y = 9 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 4y = 9 \\ -x + y = 7{,}5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x + 2 \\ 2x - 6 = 3y \end{cases}$

Resolución de problemas con SEL

Como ya hemos visto, un sistema de ecuaciones puede expresarse también en lenguaje coloquial (verbal) y el primer paso a seguir para encontrar la solución es armar el sistema en lenguaje simbólico mediante fórmulas (ecuaciones) que relacionen los datos con las incógnitas.

El planteo y resolución de sistemas de ecuaciones nace, a menudo, del planteo y solución de problemas originados en hechos de la vida cotidiana.

Para resolver problemas mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales, te proponemos seguir varios pasos:

-Plantear el problema, entendiendo su enunciado y convirtiéndolo en ecuaciones con coeficientes, constantes e incógnitas.

-Analizar el tipo de sistema que se obtiene.

-Elegir un método de resolución (analítico o gráfico) y aplicarlo.

-Estudiar si las soluciones obtenidas son pertinentes en el contexto del problema.

-Comprobar las soluciones en las ecuaciones planteadas.

Ejemplo:

➷ Enunciado:

"El perímetro de un piso rectangular es de 90m. Determina las dimensiones del piso si la longitud es el doble del ancho".

Para armar el sistema de ecuaciones en lenguaje simbólico que represente al enunciado, lo primero que tendremos que realizar es identificar las variables.
-En este caso ¿cuáles y cuántas son?

-Asigna una letra distinta a cada una de ellas

-Lee atentamente la primera parte del enunciado del problema.
¿qué dice?
Si lo hiciste tendrías que haber leído:

"El perímetro de un piso rectangular es de 90m".

-Leído esto, ¿cuáles son las palabras claves que debería tener en cuenta para armar la primera ecuación del sistema?, es decir ¿cómo se relacionan las variables?
Anímate, ✍ escribe la primera ecuación.

-Ahora vamos por la segunda ecuación.
-Leamos la segunda parte del enunciado.
¿Leíste bien?
Si lo hiciste es lo que sigue:
“Determina las dimensiones del piso si la longitud es el doble del ancho”
-En esta parte del enunciado cuales serán las palabra claves que tendrás que tener en cuenta?

Bien!!, “longitud es el doble del ancho”

¿cómo expresarías en lenguaje simbólico esta expresión verbal?
¿Con qué letra denominaste a la longitud del piso?
✍ Intenta escribir ahora esta expresión simbólica…

¡Ya está! Tienes armada la segunda ecuación que forma el sistema de ecuaciones.

¿Qué tienes que hacer ahora para hallar la solución del sistema?
✍ Resuelve

✏Ejercicio 15: Resuelve los siguientes problemas:

a) El perímetro de un rectángulo es de 24 cm. La diferencia entre la base y la altura es de 2 cm. Calcula el área.

b) La mitad de un número es igual a la tercera parte de otro. Cuáles son dichos números, si su suma es igual a 10?

c) Dos amigos visitaron una granja en la que habían gallinas y conejos. Al salir uno de ellos le preguntó al otro: "Contaste cuántas gallinas y cuántos conejos habían?". "– No, cuántos eran?", dijo éste. Y su amigo contestó: "Averígualo: en total habían 72 ojos y 122 patas". Averigua tú cuántos conejos y cuántas gallinas son.

d) Un padre, para estimular a su hijo que estudie Matemática, prometió darle $3 por cada ejercicio bien resuelto pero, por cada uno que esté mal, el hijo le dará $2. Ya van por el ejercicio 26 y el muchacho recibe de su padre $38. ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien y cuántos mal?

e) Un fabricante de lámparas ofrece un beneficio de \$0,60 por cada pieza que sale de su taller a la venta, pero sufre una pérdida de \$0,80 por cada pieza defectuosa que debe retirar. En una jornada de trabajo ha fabricado 2100 lámparas, obteniendo una ganancia de \$968,80 ¿Cuántas lámparas buenas y cuántas defectuosas se fabricaron ese día?

f) Un comerciante de autos usados compra dos autos en \$ 29 000. Vende uno con una ganancia del 10% y el otro perdiendo el 5% y así obtuvo una ganancia de \$1850 por la transacción completa. Calcula el valor de cada automóvil.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

A toda función de la forma

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que a, b y c son números reales, con **a** distinto de cero se la llama **Función Cuadrática.**

En la expresión anterior ax^2 es el **término cuadrático**, bx es el **término lineal** y c el **término independiente.**

Destacamos el significado de cada uno de los parámetros de esta función.

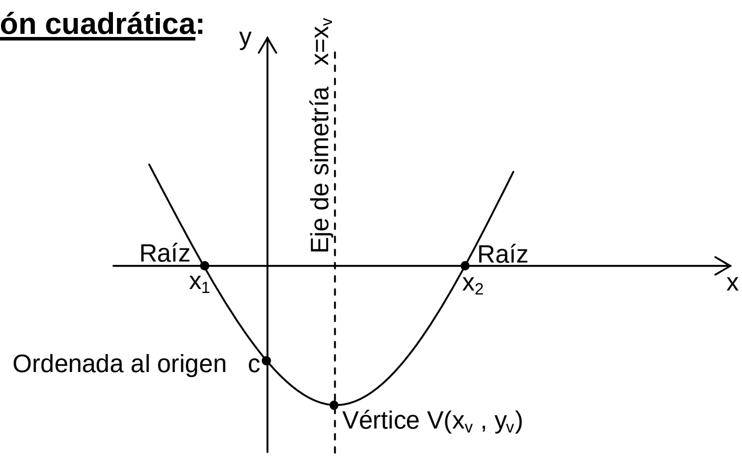
a: **coeficiente del término cuadrático**, y de acuerdo al signo que presente, señala si las ramas de la curva abren hacia arriba o abajo.

b: **coeficiente del término lineal** y de acuerdo a su signo, indica el corrimiento horizontal de la parábola.

c: t**érmino independiente** que coincide la ordenada al origen y señala la ordenada del punto donde la función corta al eje de las ordenadas ***y***.

El dominio de la función es IR y su gráfica es una curva llamada **parábola.**

Elementos de la función cuadrática:



1) Coeficiente del término cuadrático, a:

- El signo de **a** indica hacia donde se dirigen las ramas de la parábola:

  -si **a** es positivo, las ramas van hacia arriba

  -si **a** es negativo, las ramas van hacia abajo

- El valor absoluto de **a** modifica la abertura de la parábola:

  -cuanto menor es $|a|$, la parábola es más abierta

  -cuanto mayor es $|a|$, la parábola es más cerrada

2) Ceros o raíces, x_1 y x_2:

Las raíces $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ de la función cuadrática se pueden obtener reemplazando los coeficientes a, b, c en la siguiente expresión:

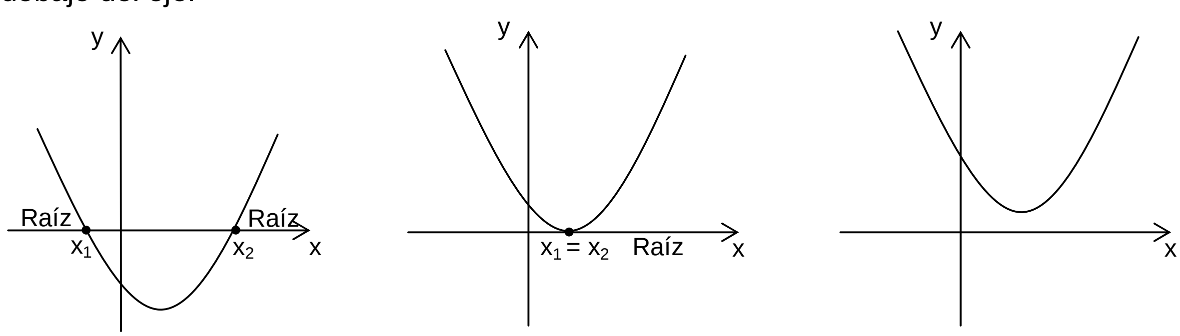
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}}$$

La expresión $b^2 - 4.a.c$ se llama **discriminante** de la ecuación.

Observemos que:

- Si $b^2 - 4.a.c > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas
- Si $b^2 - 4.a.c < 0$, la ecuación tiene dos raíces complejas
- Si $b^2 - 4.a.c = 0$, la ecuación tiene una única solución real; diremos que es una **raíz doble**

Según que la ecuación tenga dos raíces reales, una o ninguna, la parábola cortará al eje **x**, será tangente a él (toca en un solo punto al eje), o quedará toda ella por encima o por debajo del eje.



Dos raíces reales **Una raíz real doble** **Ninguna raíz real**

3) Vértice $V(x_v , y_v)$:

Podemos obtener la abscisa del vértice, x_v, mediante:

- $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$, siendo x_1 y x_2 los ceros o raíces (se aplica cuando la parábola tiene raíces reales y distintas)
- $x_v = \frac{-b}{2.a}$, siendo **a** el coeficiente del término cuadrático y **b** el coeficiente del término lineal (se puede aplicar independientemente del tipo de raíces)

La ordenada del vértice, y_v, se puede obtener mediante:

- Calculando $f(x_v)$, es decir, reemplazando el valor de x_v en la fórmula de la función.
- Mediante la fórmula: $y_v = \frac{-b^2}{4.a} + c$

4) Ordenada al origen, c:

Es la intersección de la parábola con el eje de ordenadas. Se obtiene haciendo f(0).

Podemos expresar la ecuación de una función cuadrática como muestra el siguiente cuadro:

Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica o general	$y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	a, b, c (c: ordenada al origen)
Canónica	$y = a.(x - x_v)^2 + y_v$, $a \neq 0$	a, x_v, y_v ($V=(x_v , y_v)$ vértice)
Factorizada	$y = a. (x - x_1).(x - x_2)$, $a \neq 0$	a, x_1, x_2 (x_1, x_2: raíces)

✐Ejercicio 16: Para cada un de las siguientes funciones cuadráticas de R en R:

a) $f(x) = x^2 + x - 6$
b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$
c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
d) $f(x) = 4 - x^2$
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$
f) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$
g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$
h) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

16.1) Calcula sus ceros o raíces.

16.2) Indica intersección con el eje "y".

16.3) Represéntalas gráficamente.

16.4) Halla las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

16.5) Halla la forma canónica.

16.6) Clasifícalas. Indica si admiten inversa. Si no existe su inversa, redefine los conjuntos dominio y de llegada para que tenga inversa.

PROBLEMAS APLICADOS A FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejemplo: Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de ***t*** segundos está dada por h(t) = 40t-16t^2.

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?
b) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
c) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al piso?

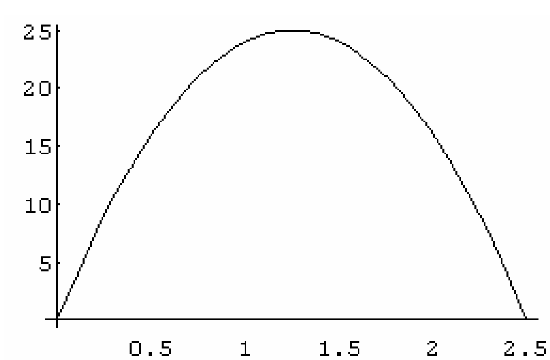
Solución: para poder contestar estas preguntas, es conveniente primeramente graficar la función h(t), y para ello, nos es necesario determinar los elementos de dicha función.

$$h(t) = -16t^2 + 40t$$

- *Coeficiente del término cuadrático:* -16 (las ramas de la parábola van hacia abajo).
- *Ceros o raíces:* $-16t^2 + 40t = 0$ para resolver esta ecuación podemos factorizar o bien utilizar la expresión $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$.
- $x_{1,2} = \dfrac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4.(-16).0}}{2.(-16)} = \dfrac{-40 \pm 40}{-32} \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \dfrac{5}{2}$
- *Coordenadas del vértice:* V(x_v ; y_v)

$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-40}{2.(-16)} = \frac{5}{4}$$
$$y_v = -16.\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 40.\frac{5}{4} = 25 \qquad \Rightarrow \quad V = \left(\frac{5}{4};25\right)$$

- *Ordenada al origen:* h(0) = -16.0^2 + 40.0 = 0



El gráfico describe la altura de la pelota en función del tiempo. Podemos observar que la pelota alcanza su altura máxima, $\mathbf{y_v}$, (25 pies) a los 1,25 s ($\mathbf{x_v}$); y cae al piso a los 2,5 s (cero o raíz). Entonces, las respuestas al problema son:

a) La altura máxima alcanzada por la pelota es de 25 pies.
b) Alcanza la altura máxima a los 1,25 segundos.
c) La pelota tarda en llegar al piso 2,5 segundos.

✐Ejercicio 17: Se lanza hacia arriba una pelota con una velocidad inicial de 96 m/seg. La altura a la que se encuentra la pelota (medida en metros) desde el suelo, en función del tiempo (medido en segundos), viene dada por la fórmula:

$$\mathbf{e(t) = -5\ t^2 + 96\ t\ ,\ para\ t \geq 0}$$

Representa dicha función gráficamente y luego contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué debe ser $t \geq 0$?

b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

d) ¿A cuántos segundos alcanza una altura de 230,4 metros?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la pelota sube? ¿En cuál baja?

✐Ejercicio 18: En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada comenzó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados N(t), a los t años está dado por:

$$\mathbf{N(t) = -t^2 + 21\ t + 100}$$

a) ¿Colocarías alguna restricción para t? ¿Por qué?

b) ¿A partir de qué momento la manada comienza a decrecer?

c) ¿Se extinguirá la población? Si es así, ¿cuándo ocurrirá?

d) ¿Para qué intervalos de tiempo es $N(t) < 0$? ¿Tiene sentido? ¿Por qué? ¿Qué significaría?

✐Ejercicio 19: Los registros de temperatura tomados entre las 0:00 hs y las 24:00 hs en una zona rural, se ajustan a la función:

$$f(x) = -0,2\,x^2 + 4.8\,x - 12,6$$

donde f es la temperatura en grados centígrados y x es la hora del día.

a) ¿Cuál fue la temperatura máxima?

b) ¿A qué hora se registró?

c) ¿Cuándo fue de cero grado la temperatura?

ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones cuadráticas son aquellas en las que el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita es dos.

La forma general de una ecuación de segundo grado con incógnita **x** es: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, con $a \neq 0$.

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \;;\; a \neq 0}$

- **Completa**
  - $b \neq 0 \;,\; c \neq 0$
  - Ejemplos: $4x^2 - 4x + 1 = 0$; $x^2 - 6x - 16 = 0$; $-3x^2 - 6x + 12 = 0$
- **Incompleta**
  - $b \neq 0 \;,\; c = 0$: $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ — Ejemplo: $3x - x^2 = 0$
  - $b = 0 \;,\; c \neq 0$: $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ — Ejemplo: $2x^2 - 15 = 0$
  - $b = 0 \;,\; c = 0$: $\mathbf{ax^2 = 0}$ — Ejemplo: $9x^2 = 0$

Las soluciones x_1 y x_2 de estas ecuaciones se obtienen aplicando la fórmula:

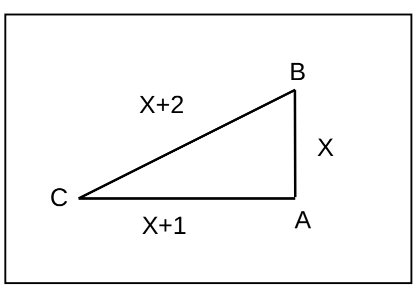
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

✐Ejercicio 20: Dada la siguiente figura, calcula:

a) El valor de x sabiendo que el triángulo es rectángulo en A.

b) El perímetro sabiendo que los lados están expresados en cm.

c) El área.



✐Ejercicio 21: Encuentra el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) 3 (x – 2)2 – 27 = 0

b) 3x (x – 2) – 2 = $\frac{7}{4}$

✐Ejercicio 22: Resuelve los siguientes problemas:

a) El cuadrado de la edad de Juan Pablo es igual a 5 veces la edad que tendrá dentro de 10 años. ¿Cuántos años tiene Juan Pablo?
b) El quíntuplo de un número es igual a la mitad de su cuadrado, aumentada en 12 unidades. ¿Qué números cumplen esa condición?
c) Calcula el perímetro de un rectángulo cuya área es 168, sabiendo que la diferencia entre la base y la altura es 2.
d) Encuentra dos números naturales impares consecutivos tales que su producto sea: 255

Para resolver el siguiente ejercicio, recuerda que si las raíces de una ecuación cuadrática son x_1 y x_2, la ecuación puede escribirse en forma factorizada así:

$$\mathbf{a.(x - x_1).(x - x_2) = 0}$$

✐Ejercicio 23: Reconstruye las ecuaciones cuadráticas correspondientes sabiendo que el coeficiente principal es 1, y sus raíces son:

a) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$

b) $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$

c) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{4}{3}$

d) $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$

✐Ejercicio 24: Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) 5 (x - 1) = 2

b) x (2x + 3) + 1 = 0

AUTOEVALUACIÓN N°2: FUNCIONES (I)

1) Contesta verdadero (V) o falso (F), según corresponda. Justifica las respuestas falsas.

a) Toda función tiene inversa. ( )
b) Una función inyectiva es siempre biyectiva. ( )
c) Si una función es biyectiva, entonces su inversa también. ( )
d) El dominio de una función coincide con el conjunto de partida. ( )
e) Si $f(x) = -x^2 + 1$, entonces: $2. f(2) + f(-1) = -8$. ( )

(15 puntos)

2) Cada uno de los siguientes ítems tiene cuatro respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Enciérrala o márcala con una cruz.

2.1) Las rectas **$y = 2x - 1$** e **$y = -2x - 1$** tienen la misma:

pendiente ( ) ord. al origen ( ) raíz ( ) ninguna es correcta ( )

2.2) La recta **$y = -\frac{1}{3}x + 2$** corta al eje "x" en:

2 ( ) -3 ( ) 3 ( ) ninguna es correcta ( )

2.3) La recta **$y = -3x + 4$** contiene al punto

(-2 ;2) ( ) (2;-2) ( ) (4 ; 0) ( ) ninguna es correcta ( )

2.4) Las rectas $y = -\frac{1}{2}x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x - 1$:

son paralelas ( ) se cortan en y = 1 ( ) se cortan en y = -1 ( )
ninguna es correcta ( )

2.5) La pendiente de la recta **$y = 5 - 3x$** es:

5 ( ) 3 ( ) -3 ( ) ninguna es correcta ( )

2.6) La recta **$y = 3x - 2$** corta al eje y en:

2 ( ) 3 ( ) -3 ( ) ninguna es correcta ( )

2.7) Los ceros de la función **$f(x) = x^2 - x - 2$** son:

1 y –2 ( ) -1 y 2 ( ) 1 y 2 ( ) ninguna es correcta ( )

2.8) La parábola que representa a la función **$f(x) = x^2 + 4x + 4$** corta al eje “x” en:

un solo punto ( ) 2 puntos ( ) ningún punto ( ) ninguna es correcta ( )

2.9)) La función $f(x) = x^2 + 1$ tiene como ceros a:

1 y –1 ( ) 0 y 1 ( ) 1 ( ) ninguna es correcta ( )

2.10) Si $f(x) = +\sqrt{\frac{4}{5}x - 2}$ es una función real, entonces su dominio es:

R^+ ( ) $\left[-\frac{5}{2};\infty\right)$ ( ) $\left[\frac{5}{2};\infty\right)$ ( ) ninguna es correcta ( )

(40 puntos)

3) Para cada una de las siguientes funciones:

a) $f : R \to R$ dada por $f(x) = -x^2 + 3x$

b) $f : R \to R$ dada por $f(x) = x^2 - 2x - 8$

3.1) Calcula sus ceros o raíces.

3.2) Indica intersección con el eje "y".

3.3) Represéntalas gráficamente.

3.4) Halla las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

3.5) Clasifícalas. Indica si admiten inversa. Si no existe su inversa, redefine los conjuntos dominio y de llegada para que tenga inversa.

(25 puntos)

4) "La suma de dos números es 2 y su diferencia es 1."

4.1) Plantea un sistema de ecuaciones para resolver el problema enunciado arriba.

4.2) Encuentra el conjunto solución de dicho sistema, indicando de qué tipo de sistema se trata.

4.3) Representa gráficamente el sistema.

(20 puntos)

MÓDULO 3

POLINOMIOS

Llamamos **polinomio** a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Donde:

- ✓ $n \in N_0$
- ✓ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ son números reales y se denominan **coeficientes**
- ✓ a_0 se denomina **término independiente**
- ✓ Si $a_n \neq 0$, es éste el **coeficiente principal**
- ✓ El exponente **n** de la variable o indeterminada x es el **grado del polinomio.**

Nota: De acuerdo a la definición dada, no pueden ser polinomios las expresiones que contengan potencias con exponente negativos o fraccionarios de la variable, o cuando "x" esté afectada por una función logarítmica, trigonométrica o exponencial.

Ejemplo: P(x) $= 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x + 1$ es un polinomio

- *Coeficientes: 4, 3, -2,* $-\frac{1}{2}$, 1
- *Grado: 5*
- *Coeficiente principal: 4*
- *Término independiente: 1*

✐Ejercicio 1: Dadas las siguientes expresiones, encierra aquellas que sean polinómicas:

a) $P(x) = \frac{1}{2}x^2$

b) $P(x) = 2\sqrt{x}$

c) $P(x) = -\frac{1}{3}x + \sqrt{3}$

d) $P(x) = \frac{16}{x}$

e) $P(x) = 2^x$

f) $P(x) = 5 - 2x^2$

Polinomio ordenado

Un polinomio está ordenado si sus términos están ordenados por sus potencias en forma creciente o decreciente.

Ejemplo:

$P(x) = 9x^5 + 3x^2 - x + 5$ (polinomio ordenado en forma decreciente)

$P(x) = 5 – x + 3x^2 + 9x^5$ (polinomio ordenado en forma creciente)

Polinomio completo

Un polinomio en una variable es completo cuando contiene todos los exponentes sucesivos respecto a dicha variable o indeterminada.

En caso que el polinomio este incompleto, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero, para obtener una expresión equivalente a la dada.

Ejemplo:

$P(x)= 4x^4 + 3x^2 – 0,5$, es un polinomio incompleto.

Su equivalente completo es: $P(x) = 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 0,5$

✐<u>Ejercicio 2</u>: Para cada uno de los siguientes polinomios:

$$P(x) = -3x + 5x^3 - 2 + 3x^5$$

$$Q(x) = -4x2 + x4 + 2$$

a) Complétalo y ordénalo en forma decreciente.
b) Indica cuál es su grado, su coeficiente principal y su término independiente.

Polinomio nulo

Un polinomio es nulo cuando los coeficientes del mismo son nulos, y en este caso el polinomio no tiene grado.

En símbolos es:

$P(x) = 0\,x^n + 0\,x^{n-1} +....+ 0\,x^2 + 0\,x + 0$

$P(x) = 0$

Polinomio opuesto

Dado un polinomio P(x) cualquiera, su opuesto –P(x) es aquel en que los coeficientes son números opuestos a los coeficientes de P(x).

Ejemplo:

$P(x) = -7x^3 + 4x^2 -2x + 1$

$-P(x) = 7x^3 - 4x^2 +2x -1$ (polinomio opuesto)

✐<u>Ejercicio 3</u>: Demuestra que los polinomios P(x) y Q(x) son opuestos:

$$P(x) = (x-2)^2 - 5x^3 - 3x^2$$
$$Q(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4 + 4x$$

✐Ejercicio 4: ¿Cuánto tiene que valer **m**, **n**, **p** y **k** para que los siguientes polinomios sean opuestos:

$$R(x) = -5x^3 + \mathbf{m}x^2 + \mathbf{n}$$
$$S(x) = \mathbf{p}x^3 - 9x^2 + \mathbf{k}x + 1$$

Polinomios iguales

Dado un polinomio P(x) cualquiera, un polinomio Q(x) es igual a P(x), si tiene el mismo grado y los mismos coeficientes.

✐Ejercicio 5: Encuentra el valor de **a**, **b** y **c** para que los polinomios P(x) y Q(x) sean iguales:

$$P(x) = \mathbf{a}x^3 + (\mathbf{b} + 1)\,x^2 - 2x$$
$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + \mathbf{c}x$$

Polinomio mónico

Dado un polinomio de grado n, se dice que es mónico si el coeficiente del término principal, $a_n = 1$.

Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio es el que se obtiene al sustituir la variable x por un número real **a** y efectuar las operaciones indicadas en el polinomio.

Ejemplo: Si $P(x) = -2x^4 + 8x^2 - 9x + 3$, entonces para obtener su valor numérico en 2, -1 y 0, procedemos de la siguiente manera:

$P(2) = -2.(2)^4 + 8.(2)^2 - 9.(2) + 3 = -15$

$P(-1) = -2.(-1)^4 + 8.(-1)^2 - 9.(-1) + 3 = 18$

$P(0) = -2.(0)^4 + 8.(0)^2 - 9.(0) + 3 = 3$

Operaciones con Polinomios

A continuación mostraremos como se pueden realizar las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división entre polinomios.

Suma:

Calculamos la suma de los polinomios $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y $q(x) = 5x^3 – 7x + 8$.

Una forma práctica de realizar esta operación es ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro. Si falta algún término intermedio en algún polinomio, lo completamos escribiendo dicho término con coeficiente 0.

$$\begin{array}{rrcl} & p(x) & = & 0x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ + & & & \\ & q(x) & = & 5x^3 + 0x^2 - 7x + 8 \\ \hline & p(x) + q(x) & = & 5x^3 + 3x^2 - 5x + 9 \end{array}$$

Resta:

Calculamos la resta de los polinomios $p(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 8$ y $q(x) = x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 5$.

Como antes para operar es conveniente ordenar los polinomios y escribir uno debajo del otro.

$$\begin{array}{rrcl} & p(x) & = & x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 0x + 8 \\ - & & & \\ & q(x) & = & x^5 + 5x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 5 \\ \hline & p(x) - q(x) & = & \quad -3x^4 - 7x^3 + 4x^2 \qquad + 3 \end{array}$$

El resultado de la suma o la resta de dos polinomios puede ser el polinomio nulo o tener grado menor o igual que el del polinomio de mayor grado que estamos sumando o restando.

Multiplicación:

Para calcular el producto de dos polinomios multiplicamos cada uno de los términos de un polinomio por cada uno de los términos del otro y sumamos. Para multiplicar los polinomios $p(x) = 7x^3 – 5x + 2$ y $q(x) = 2x^2 + 5x – 1$, una disposición práctica es la siguiente:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & 7x^3 & & -5x & +2 \\ \cdot & & & & 2x^2 & +5x & -1 \\ \hline & & & -7x^3 & & +5x & -2 \\ & & 35x^4 & & -25x^2 & +10x & \\ & 14x^5 & & -10x^3 & +4x^2 & & \\ \hline & 14x^5 & +35x^4 & -17x^3 & -21x^2 & +15x & -2 \end{array}$$

Observemos que cuando se multiplican dos polinomios no nulos el resultado es un polinomio cuyo grado es igual a la suma de los grados de los polinomios factores.

La multiplicación de polinomios también se puede realizar, utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y resta.

Ejemplo: p(x). q(x)

$p(x).\ q(x) = (7x^3 - 5x + 2).(2x^2 + 5x - 1) = 14x^5 + 35x^4 - 7x^3 - 10x^3 - 25x^2 + 5x + 4x^2 + 10x - 2$

$\mathbf{p(x).\ q(x) = 14x^5 + 35x^4 - 17x^3 - 21x^2 + 15x - 2}$

División:

Recordemos que para números enteros podemos realizar el algoritmo de Euclides para la división, así, si queremos dividir 7 por 4 obtenemos:

$$\begin{array}{llcl} \text{Dividendo} \rightarrow & 7 & \underline{\big|\ \ 4\ \ } & \leftarrow \text{Divisor} \\ \text{Resto} \rightarrow & 3 & 1 & \leftarrow \text{Cociente} \end{array}$$

Se verifica que 7 = 4 . 1 + 3, y el resto es siempre menor que el divisor.

Es posible realizar la división de polinomios en forma análoga a ésta.

Para obtener los polinomios cociente y resto, a partir de los polinomios dividendo y divisor, se deben cumplir las siguientes condiciones:

a) El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el del polinomio divisor.

b) Ambos polinomios se ordenan en forma decreciente. Si falta algún término se completa el polinomio colocando los coeficientes nulos en los términos faltantes o dejando un lugar vacío en el mismo.

c) El grado del resto debe ser menor que el del divisor, o ser el polinomio nulo.

Ejemplo: Hallar el cociente y el resto de la división entre $A(x) = -4x^3 + 3x^2 + 6x^4 - 5$ y $B(x) = -x + 2x^2$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -\ 4x^3 & +\ 3x^2 & +\ 0x & -\ 5 & 2x^2 - x \\
\cline{6-6}
-6x^4 & +\ 3x^3 & & & & 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \\
\hline
 & -x^3 & +\ 3x^2 & +\ 0x & -\ 5 & \\
+ & x^3 & -\ \frac{1}{2}x^2 & & & \\
\hline
 & & \frac{5}{2}x^2 & +\ 0x & -\ 5 & \\
+ & & -\frac{5}{2}x^2 & +\ \frac{5}{4}x & & \\
\hline
 & & & \frac{5}{4}x & -\ 5 &
\end{array}
$$

Cociente: $C(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

Resto: $R(x) = \frac{5}{4}x - 5$

✐Ejercicio 6: Deduce y escribe las fórmulas correspondientes al:

a) Cuadrado de un binomio: $(a + b)^2$
b) Cubo de un binomio: $(a + b)^3$
c) Producto de binomios conjugados: $(a + b)(a – b)$

✐Ejercicio 7: Dados los siguientes polinomios, realiza las operaciones indicadas:

$P(x) = x^3 – 5x – 3x^2 + 15$

$Q(x) = 4x^3 – 2x + 5$

$R(x) = 2x^2 – 3$

$S(x) = 3x + 2$

$T(x) = 3x – 2$

a) $P(x) + Q(x) =$
b) $2\,P(x) – R(x) =$
c) $\frac{1}{2}\,Q(x) – [R(x) – P(x)] =$
d) $Q(x)\ .\ S(x) =$
e) $[R(x)]^2 =$
f) $[S(x)]^3 =$
g) $S(x)\ .\ T(x) =$

✐Ejercicio 8: En una división de polinomios, el divisor es $2x^2 + x + 5$, el cociente es x^2+x, y el resto es $x+6$. ¿Cuál es el polinomio dividendo?

Recuerda: Dividendo = Divisor . Cociente + Resto

✐Ejercicio 9: Halla el cociente y el resto de la división entre P(x) y Q(x).

$$P(x) = 2x^5 + 8x^3 - x^6$$

$$Q(x) = x^2 + 2x$$

✐Ejercicio 10: Realiza las siguientes divisiones y verifícalas (Dividendo = Divisor. Cociente + Resto):

a) $(-4x^2 + x^4 + x^3 + 2 + 2x) : (x - 1 + x^2)$

b) $(10x^2 + 13x - 3) : (5x - 1)$

Regla de Ruffini:

Cuando tenemos que dividir un polinomio p(x) por uno de la forma (x – a), es conveniente utilizar la llamada *regla de Ruffini.*

Para aplicar la regla de Ruffini es indispensable ordenar y completar el polinomio dividendo.

El grado del polinomio cociente, es una unidad menor que el grado del polinomio dividendo.

Teorema del resto:

Este teorema nos permite calcular el resto de la división entre un polinomio cualquiera P(x) y otro binomio de la forma: Q(x) = x - a

Como Q(x) es un polinomio de grado 1, el resto de la división puede ser cero o un polinomio de grado cero.

Se obtiene al sustituir la variable x por el número que anula al divisor y efectuar las operaciones indicadas en el polinomio.

Ejemplo: Hallar el cociente y el resto de la división entre $A(x) = x^3 + 2x + 12$ y $B(x) = x + 2$ aplicando la regla de Ruffini y verifica con el Teorema del resto.

Debemos completar y ordenar el polinomio A(x) entonces: $A(x) = x^3 + 0x^2 + 2x + 12$

Coeficientes de A(x)

Valor que anula B(x)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 2 & 12 \\ -2 & & -2 & 4 & -12 \\ \hline & 1 & -2 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

Cociente: $C(x) = x^2 - 2x + 6$

Resto: $R(x) = 0$ (decimos que la división es exacta o que A(x) es divisible por B(x))

Teorema del resto: $A(-2) = (-2)^3 + 2.(-2) + 12 = 0$ (resto de la división)

✐<u>Ejercicio 11</u>: Dada la división $P(x) : Q(x)$, con $P(x) = 2x^3 - x + 5$ y $Q(x) = x - 2$

a) Divide aplicando Regla de Ruffini.
b) Halla P(2).
c) Compara el valor de P(2) con el resto de la división.
d) Indica con qué nombre se conoce la propiedad a la que arribas.

✐<u>Ejercicio 12</u>: Realiza las siguientes divisiones, aplicando la regla de Ruffini y verificando con el teorema del resto. No olvides de expresar el cociente C(x) y el resto R(x).

a) $(2 + 3x^2 - x^5 + 2x^3) : (x + 1)$

b) $(3x^4 + 3 - 2x^2) : (x - 3)$

c) $(8 - 7x^2 + x^4) : (x + ½)$

d) $(x^2 - 4) : (x + 2)$

e) $(x^5 + 32) : (x + 2)$

f) $(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) : (x - 3)$

✐<u>Ejercicio 13</u>: Calcula el valor de **m** para que al dividir $2 - x^2 + \mathbf{m}x^3$ por $x + 2$ tal división tenga por resto -34. Verifícalo.

✐<u>Ejercicio 14</u>: Se sabe que al dividir $x^3 - x^2 + \mathbf{n}x - 10$ por $x - 2$ la división es exacta. ¿Cuánto vale **n**?

✐<u>Ejercicio 15</u>: Se sabe que al dividir $x^3 - x^2 + 11x + \mathbf{b}$ por $x - 3$ la división es exacta. ¿Cuánto vale **b**?

✐<u>Ejercicio 16</u>: Se sabe que al dividir $(x^3 - x^2 + \mathbf{a}x - 10)$ por $(x - 2)$, la división es exacta, es decir se obtiene resto cero. Calcula el valor de "a".

✐<u>Ejercicio 17</u>: Calcula el valor de "m" para que al dividir $(5x - 1 + \mathbf{m}x^3)$ por $(x + 1)$ se obtenga resto -9.

✏Ejercicio 18: Encuentra los polinomios asociados a:

a) $(3x + 2)^3 =$

b) $(5x + 3).(5x - 3) =$

c) $(4 - 7x)^2 =$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

A veces, los polinomios pueden ser expresados como el producto de polinomios de menor grado y primos. A este proceso se lo llama factorización. Este proceso es útil para hallar las raíces de un polinomio, ya que es más sencillo encontrar las raíces de cada factor que las raíces del polinomio original.

La descomposición factorial de un polinomio o factorización de un polinomio, nos será muy útil para trabajar con las operaciones entre expresiones algebraicas enteras y racionales fraccionarias, así como también para simplificar expresiones de funciones, calcular el o los puntos en que corta al eje de las abscisas y en algunos casos para determinar los puntos en los que no está definida.

Los casos de factoreo son:

- Factor común
- Factor común por grupos de igual número de términos.
- Trinomio cuadrado perfecto.
- Cuatrinomio cubo perfecto.
- Diferencia de cuadrados.
- Suma o diferencia de potencias de igual grado

Factor común:

Observa el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 4x^2$

Podemos factorizarlo extrayendo los factores comunes a ambos términos.

Para ello seguimos el siguiente procedimiento que consiste en:

- ✓ Calcular el mayor divisor común de los coeficientes.
- ✓ Identificar la variable x, con el menor exponente de todos los términos.

Volviendo al polinomio $P(x)= 2x^4 + 4x^2$

Es mdc(2,4) = 2, es el mayor divisor común a los coeficientes, 2 y 4, y x^2, que es el factor literal con menor exponente de los términos dados es también el mayor y común divisor a los factores literales, x^4 y x^2.

Entonces el factor común es: $2x^2$ que a su vez es el mayor común divisor a cada uno de los términos del polinomio.

Si dividimos cada término del polinomio, por el factor común obtenemos:

$$P(x) = 2x^4 + 4x^2 = \mathbf{2x^2\ (x^2 + 2)}$$

✐Ejercicio 19: Extrae factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a) $36\ x^2 - 27\ x^4 =$
b) $-12x^3 + 9x^2 - 6x =$
c) $18x^3.(x-2) + 6x^2.(x-2) + 9x\ .(x-2) =$

Factor común por grupos:

No siempre es posible factorizar un polinomio a partir del factor común, pero hay polinomios que presentan una estructura que nos permite formar grupos con el mismo número de términos que presentan un factor común para cada uno de esos grupos.

Analicemos este ejemplo:

$$ax + ay + bx + by$$

Puedes observar que los dos primeros términos tienen de común el factor **a**, y los dos últimos, el factor **b**. Asociamos los dos primeros términos y los dos últimos términos:

$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$$

Luego extraemos de cada paréntesis el factor común:

$$ax + ay + bx + by = a\ (x + y) + b\ (x + y)$$

Observamos que han quedado dos términos que tienen como factor común (x + y), entonces extraemos ese factor común:

$$ax + ay + bx + by = \mathbf{(x + y)\ (a + b)}$$

Entonces, la expresión de cuatro términos ha quedado factorizada como un producto de dos factores.

Los polinomios que se pueden factorizar de esta forma cumplen con el siguiente requisito:
Los grupos de términos que tienen factores comunes deben tener el mismo número de términos.

✐Ejercicio 20: Extrae factor común por grupos:

a) $x^3 - 5x - 3x^2 + 15 =$
b) $12x^3 - 8x^2 - 3x + 2 =$
c) $10x^3 - 8x^2 + 15x - 12 =$

Trinomio cuadrado perfecto:

¿Recuerdas el resultado al realizar $(x + a)^2$? (observa el ejercicio 10 c)

La expresión que se obtiene se denomina trinomio cuadrado perfecto, que factorizada, es el cuadrado de un binomio.

Un trinomio cuadrado perfecto consta de tres términos, que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ Dos de los términos son cuadrados perfectos.
- ✓ El término restante es el duplo de la multiplicación de las bases de los cuadrados perfectos.

Para desarrollar el cuadrado de un binomio, lo pensamos como el producto del binomio por sí mismo y aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Es decir:

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a\,a + a\,b + b\,a + bb = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$\underbrace{\mathbf{(a + b)^2}}_{\text{Cuadrado de un binomio}} \quad = \quad \underbrace{\mathbf{a^2 + 2\,a\,b + b^2}}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Que leemos: el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Ejemplo:

El trinomio $25x^2 + 10\,xy^2 + y^4$ es un trinomio cuadrado perfecto porque:

El primer término es el cuadrado de 5x ya que $(5x)^2 = 25x^2$

El tercer término es el cuadrado de y^2 ya que $(y^2)^2 = y^4$

El segundo término es el duplo de la multiplicación de las bases de esos cuadrados, es decir: $2.5xy^2 = 10xy^2$

El trinomio cuadrado perfecto dado se factoriza: $25x^2 + 10\,xy^2 + y^4 = \mathbf{(5x + y^2)^2}$

✐Ejercicio 21: Analiza si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos. Si lo son, factorízalos:

a) $1 + 18x + 81x^2 =$

b) $\frac{4}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 1 =$

c) $9 - 30x + 25x^2 =$

d) $\frac{1}{9}x^2 + 16 + 8x =$

e) $\frac{9}{25} + 4x^4 - \frac{12}{5}x =$

Cuatrinomio cubo perfecto:

¿Recuerdas el resultado al realizar $(x + a)^3$? (observa el ejercicio 10 a)

La expresión que se obtiene se denomina cuatrinomio cubo perfecto, que factorizada, es el cubo de un binomio.

Un cuatrinomio cubo perfecto de la forma $x^3 + 3\,x^2a + 3\,xa^2 + a^3$ consta de cuatro términos, que cumplen las siguientes condiciones:

- ✓ Dos de los términos son cubos perfectos, x^3 y a^3
- ✓ Un tercer término $3\,x^2a$, es el triplo del cuadrado de la base del primer cubo por la base del segundo.
- ✓ El cuarto término $3\,xa^2$, es el triplo de la base del primer cubo por el cuadrado de la base del segundo cubo.

Para desarrollar el cubo de un binomio, desarrollamos primero el cuadrado y luego multiplicamos la expresión que obtuvimos por el binomio original:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = (a^2 + 2\,a\,b + b^2) (a + b)$$

$$= a^3 + a^2\,b + 2\,a^2\,b + +2\,a\,b^2 + a\,b^2 + b^3$$

$$\mathbf{(a + b)^3 \quad = \quad a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3}$$

Cubo de un binomio **Cuatrinomio cubo perfecto**

En todos los casos en los que desarrollemos el cubo de un binomio, obtendremos una expresión que contendrá:

"El cubo del primer término más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo más el triple del cuadrado del segundo más el cubo del segundo término".

Ejemplo: Dado $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ es un cuatrinomio cubo perfecto porque:

$x^3 = (x)^3$ $\qquad$ $6x^2y= 3(x)^2\,2y$

$8y^3= (2y)^3$ $\qquad$ $12xy^2= 3(x)\,(2y)^2$

Luego este cuatrinomio cubo perfecto se factoriza: $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = \mathbf{(x + 2y)^3}$

✐Ejercicio 22: Analiza si los siguientes cuatrinomios son cubos perfectos. Si lo son, factorízalos:

a) $-x^3 - 9x^2 - 27x - 27 =$

b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 =$

c) $x^3 + 64 - 12x^2 - 48x =$

d) $\frac{27}{64}x^3 + \frac{27}{16}x^2 + \frac{9}{4}x + 1 =$

e) $\frac{1}{8} - \frac{9}{4}x + \frac{15}{2}x^2 - 125x^3 =$

Diferencia de cuadrados:

¿Te acuerdas cuando realizaste la multiplicación (a + b) (a – b)? (observa ejercicio 10 b)

Aplicando propiedad distributiva, obtenemos:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Luego, por la propiedad simétrica de la igualdad:

$$\underbrace{(a^2 - b^2)}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = \underbrace{(a - b).(a + b)}_{\text{Producto de la suma por la diferencia}}$$

Decimos entonces:

"Toda diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de las bases".

✐Ejercicio 23: Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $49x^2 - 100 =$

b) $x^8 - 1 =$

c) $(x + 1)^2 - 4 =$

d) $x^2 - 2 =$

e) $4x^2 - \frac{9}{25} =$

f) $16x^4 - 1 =$

Suma o diferencia de potencias de igual grado:

Estos polinomios son particularmente binomios que presentan la siguiente expresión: $P(x) = x^n + a^n$, o $P(x) = x^n - a^n$, siendo n un número natural.

Para factorizarlos, es de suma importancia tener presente dos propiedades que son:

- ✓ Todo polinomio de grado n tiene n raíces (números reales o complejos, iguales o distintas).
- ✓ Si de un polinomio de grado n, conocemos sus n raíces: x_1, x_2,....,x_n, (siendo el coeficiente principal a_n), podemos escribir su expresión factorizada:

$$\mathbf{P(x) = a_n\,(x - x_1).\,(x - x_2).\,(x - x_3)\ldots\,(x - x_n)}$$

Para llevar a cabo la factorización utilizaremos dos conceptos:

- ✓ Estas expresiones son divisibles (resto = 0) por un binomio de la forma (x+**a**), siempre que **a**, sea un cero o raíz del polinomio dado. Por lo que P(x)= (x-a).C(x) (es decir, P(x) = Divisor . Cociente)
- ✓ La regla de Ruffini para calcular los coeficientes de C(x), y verificar si efectivamente el valor hallado para **a**, es un cero del polinomio.

Debemos averiguar si $x^n + a^n$ ó $x^n - a^n$ son divisibles por (x + a) ó por (x – a). En ambos casos, la divisibilidad depende si el exponente n (número natural) es par o impar.
Ya que estamos trabajando con división de polinomios, siendo el divisor un binomio de primer grado en x podemos aplicar el Teorema del Resto. Si es divisible, el resto será cero y podremos factorizar como: $x^m \pm a^m = (x \pm a)\,C(x)$

A continuación analizaremos algunos ejemplos particularizando si el grado es un número natural par o impar. Para ello comprobaremos que las siguientes divisiones sean exactas aplicando el teorema del resto y calcularemos el cociente aplicando regla de Ruffini.

- **Si n es impar**

<u>Para la suma</u>:

$$(x^3 + 27) : (x + 3) = (x^3 + 3^3) : (x + 3)$$

Aplicando el teorema del resto haciendo x = -3 resulta: $(-3)^3 + 3^3 = 0$, la división es exacta y aplicando regla de Ruffini obtenemos el cociente.

$$(x^3 + 27) : (x + 3) = x^2 - 3x + 9 \quad (1)$$

Utilizamos en la igualdad (1) el algoritmo de la división:
dividendo = divisor. cociente + resto, de esta forma obtenemos la expresión factorizada:

$$\mathbf{x^3 + 27 = (x + 3)\,(x^2 - 3x + 9)}$$

<u>Para la diferencia</u>:

$$(x^5 - 32) : (x - 2) = (x^5 - 2^5) : (x - 2)$$

Aplicando el teorema del resto haciendo x = 2 resulta: 25 - 25 = 0, la división es exacta y aplicando regla de Ruffini obtenemos el cociente.

$$(x^5 - 32) : (x - 2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \quad (2)$$

Utilizamos en la igualdad (2) el algoritmo de la división. Así obtenemos:

$$x^5 - 32 = (x - 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

- **Si n es par**

<u>Para la suma</u>:

$$(x^6 + 64) : (x \pm 2) = (x^6 + 2^6) : (x \pm 2)$$

Aplicando el teorema del resto:

x = - 2 resulta: $(-2)^6 + 2^6 = 128$, la división no es exacta.

x = 2 resulta: $2^6 + 2^6 = 128$, la división no es exacta.

Si se presenta una suma de dos potencias de grado par, no es divisible por la suma ni la diferencia de las bases.

<u>Por la diferencia</u>:

$$(x^4 - 16) : (x + 2) = (x^4 - 2^4) : (x + 2)$$
$$(x^4 - 16) : (x - 2) = (x^4 - 2^4) : (x - 2)$$

En estos dos últimos ejemplos el dividendo es divisible por el divisor, es decir, el resto de cada división es cero. Por lo tanto aplicamos regla de Ruffini para obtener los respectivos cocientes y luego expresamos estas dos maneras de factorizar $x^4 - 16$.

$$x^4 - 16 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$$
$$x^4 - 16 = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

Pero, si observamos en ambos casos el segundo factor, nos damos cuenta que el proceso de factorizar no está terminado, pues el segundo factor también es factorizable por el segundo caso de factoreo (factor común por grupos de igual número de términos).

$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x^3 - 2x^2) + (4x - 8) = x^2(x - 2) + 4(x - 2) = (x^2 + 4) (x -2)$

Obtenemos entonces: $\mathbf{x^4 - 16 = (x^2 + 4) (x -2) (x + 2)}$

✐<u>Ejercicio 24</u>: Factoriza, si es posible, las siguientes sumas o diferencias de potencias de igual grado:

a) $x^3 - 64 =$ **b)** $x^4 - 16 =$

c) $x^4 + 81 =$ **d)** $x^5 + 1 =$

✐<u>Ejercicio 25</u>: Factoriza, si es posible, los siguientes polinomios aplicando los distintos casos:

$A(x) = 3x^3 - 12 x$ $B(x) = 6x^6 - 54x^2$

$C(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ $D(x) = 4x^2 + 4x + 1$

$E(x) = 15x + 20x^2 + 5x^3$ $F(x) = 24x^3 + 6x^2 - 18x^4$

$G(x) = 3mx^2 + 6mx - 2nx^2 - 4nx$ $H(x) = x^2 -16$

$I(x) = x^3 - 1$ $J(x) = x^4 - 9x^2$

$K(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10$

✐<u>Ejercicio 26</u>: Dadas las raíces de un polinomio mónico, reconstruye dicho polinomio:

$x_1 = 3$ $x_2 = x_3 = 4$ (raíz doble)

Recuerda: *$P(x) = a_n. (x - x_1). (x - x_2). (x - x_3)\ldots\ldots (x - x_n)$, siendo a_n el coeficiente principal del polinomio y $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sus raíces.*

<u>Para resolver los siguientes ejercicios, te será útil leer los siguientes puntos</u>:

Para utilizar el método de la factorización a partir de los ceros o raíces reales del polinomio tenemos en cuenta:

a) Calculo de alguna raíz entera a partir de los divisores enteros del término independiente.
b) Verificar si los divisores son raíces del polinomio utilizando el teorema del resto.
c) Se calcula el cociente, C(x), entre P(x) y el divisor (x – a) utilizando la Regla de Ruffini, de modo que: P(x) = (x – a)C(x) (Dividendo = divisor . cociente)
d) Se repite lo realizado en el punto c), en caso de que C(x) sea factorizable y se sigue hasta que no sea posible la factorización.

✐Ejercicio 27: Sabiendo que $x_1 = -4$ es un cero o raíz del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

a) Encuentra las otras dos raíces de P(x): x_2 y x_3.
b) Expresa a P(x) factorizado.
c) Verifica que x_1, x_2 y x_3 son raíces de P(x).

✐Ejercicio 28: Se sabe que $x_1 = 2$ es un cero o raíz de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$. Encuentra las otras raíces, y expresa el polinomio P(x) factorizado.

✐Ejercicio 29: Para cada uno de los siguientes polinomios se indica una de sus raíces. Encuentra las demás raíces y factoriza el polinomio.

a) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; $x_1 = -2$
b) $P(x) = x^3 – x + 5x^2 – 5$; $x_1 = 1$
c) $P(x) = x^3 + 3x^2 – 10x$; $x_1 = -5$
d) $P(x) = x^3 – 13x – 12$; $x_1 = 4$

MÁXIMO COMÚM DIVISOR – MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

La factorización de polinomios te servirá, entre otras cosas, para calcular el mínimo común múltiplo o múltiplo común menor, MCM y el máximo común divisor MCD, los que a su vez te permitirán trabajar con funciones racionales.

- El M.C.D. de dos o más polinomios es todo polinomio de grado máximo que sea divisor de todos los polinomios dados.

- El M.C.M. de dos o más polinomios es todo polinomio de grado menor que sea múltiplo de todos ellos.

Pasos para el cálculo del M.C.D. y del M.C.M.:
1º Se factorizan los polinomios dados.
2º El M.C.D. es la multiplicación de los factores comunes a los polinomios dados, elevados a su menor exponente.
3º El M.C.M. es la multiplicación de los factores comunes y no comunes a los polinomios dados, elevados a su mayor exponente.

Ejemplo: Calcularemos el MCD y el MCM de los polinomios:

$$2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad x^4 - 1 \quad ; \quad x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Primero factorizamos cada polinomio. Te proponemos que analices qué casos de factoreo se aplicaron en cada uno:

- ✓ $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) = \mathbf{(x^2 + 1)(2x - 3)}$
- ✓ $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = \mathbf{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$
- ✓ $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + (x - 2) = \mathbf{(x^2 + 1)(x - 2)}$

Ten presente que:

- ✓ El MCD debe dividir en forma exacta (con resto cero) a todos los polinomios, por lo tanto está formado por los factores comunes con su menor exponente.

En nuestro caso es: **MCD =** $\mathbf{x^2 + 1}$

- ✓ El MCM es el polinomio que contiene a todos los polinomios, es decir que debe ser divisible por todos. Por ello se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

En nuestro ejemplo es: **MCM =** $\mathbf{(x^2 + 1).(2x - 3).(x - 1).(x + 1).(x - 2)}$

✐<u>Ejercicio 30</u>: Calcula el mínimo común múltiplo (MCM) y el máximo común divisor (MCD) de:

a) $P(x) = x^4 - 81$ $\quad$ $Q(x) = x^2 - 9$

b) $P(x) = x^2 + 10x + 25$ $\quad$ $Q(x) = x^3 + 125$ $\quad$ $S(x) = x^2 - 25$

c) $P(x) = x^2 + 6x + 9$ $\quad$ $Q(x) = x^3 + x + 3x^2 + 3$ $\quad$ $S(x) = x^3 + 2x^2 + x$

d) $P(x) = 3x^2 + 6x$ $\quad$ $Q(x) = x^2 - 4$

<u>EXPRESIONES RACIONALES FRACCIONARIAS</u>

Así como llamamos números racionales a los números que se pueden expresar de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in Z$ y $b \neq 0$, llamamos **expresiones racionales** a las expresiones de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son polinomios y Q(x) <u>no</u> es el polinomio nulo.

Ejemplo:

$$\frac{-3x^2+5x-1}{x^3+5x-6} \quad , \quad P(x) = -3x^2 + 5x - 1 \ , \ Q(x) = x^3 + 5x - 6$$

Recordemos que P(x) recibe el nombre de **numerador** y Q(x) el de **denominador**.

Al trabajar con expresiones racionales es conveniente tener una expresión equivalente más simple. Es posible simplificarla cuando existen factores comunes al numerador y al denominador, en caso contrario, la expresión racional recibe el nombre de **irreducible**.

Una herramienta útil para simplificar expresiones racionales es la factorización de polinomios.

La simplificación consiste en factorizar el numerador y denominador con el objeto de eliminar los factores comunes que existan en ellos. Esta operación se repite hasta que los dos polinomios resulten primos entre sí. En este caso, decimos que la fracción está reducida a su más simple expresión o bien es una fracción irreducible.

Al simplificar hay que tener en cuenta que se deben excluir los valores de x que hacen cero el factor que se simplifica.

Ejemplo: Simplifica la expresión racional para que resulte irreducible.

$$\frac{-x+2}{x^3-4x} = \frac{-x+2}{x.(x^2-4)} = \frac{(-1).\cancel{(x-2)}}{x.\cancel{(x-2)}.(x+2)} = \frac{-1}{x.(x+2)}$$

✐Ejercicio 31: Simplifica las expresiones racionales para que resulten irreducibles:

a) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3} =$

b) $\dfrac{3x^3 - 15x^2 - 42x}{3x^2 + 6x} =$

c) $\dfrac{x^4 + x^2}{x^4 - 1} =$

Operaciones con Expresiones Racionales

- **Suma y Resta:**

a) Expresiones de igual denominador

Para sumar y restar dos expresiones racionales $\frac{p}{m}$ y $\frac{q}{m}$ de igual denominador, hacemos:

$$\frac{p}{m} + \frac{q}{m} = \frac{p+q}{m} \qquad \text{y} \qquad \frac{p}{m} - \frac{q}{m} = \frac{p-q}{m}$$

Ejemplo: Considerar las siguientes expresiones algebraicas: $\frac{-2x^2}{x^2-9}$ y $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$:

<u>Suma</u>: $\frac{-2x^2}{x^2-9} + \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-2x^2+x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-x.\cancel{(x+3)}}{(x-3).\cancel{(x+3)}} = \frac{-x}{x-3}$

<u>Resta</u>: $\frac{-2x^2}{x^2-9} - \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{-2x^2-(x^2-3x)}{x^2-9} = \frac{-3x^2+3x}{x^2-9}$

b) Expresiones de distinto denominador

Recordemos que para sumar o restar números racionales de distinto denominador, debemos sumar o restar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Lo más conveniente es tomar como denominador común el MCM de los dos denominadores, para ello debemos tener presente los siguientes pasos:

1. Se calcula el MCM de sus denominadores al que llamaremos mínimo común denominador, factorizando cada uno de los denominadores.
2. Se divide el M.C.M encontrado por cada uno de los denominadores y el resultado de cada cociente se multiplica por el numerador correspondiente.
3. Se realizan las operaciones que han quedado indicadas en el numerador.
4. Luego se escribe el resultado de la operación que será la fracción algebraica que tiene como numerador la expresión obtenida en el paso 3 y como denominador el M.C.D. encontrado en el paso 1. Si es posible se factoriza el numerador para simplificar con factores del denominador hasta que la fracción sea irreducible.

Ejemplo: Hallar $\frac{2}{3x^2-6x+3} + \frac{x}{x^2+3x-4}$

En primer lugar, hallamos el denominador común (MCM) de ambas expresiones, para lo que debemos factorizar cada uno de los denominadores:

$3x^2 - 6x + 3 = 3.(x^2 - x + 1) = \mathbf{3.(x-1)^2}$

$x^2 + 3x - 4 = \mathbf{(x-1).(x+4)}$

Así, el MCM = **$3.(x - 1)^2.(x + 4)$**

Luego,

$$\frac{2}{3x^2 - 6x + 3} + \frac{x}{x^2 + 3x - 4} = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1).(x+4)} = \frac{2(x+4) + x.3(x-1)}{3(x-1)^2(x+4)} = \frac{3x^2 - x + 8}{3(x-1)^2(x+4)}$$

- **Multiplicación:**

Para multiplicar dos expresiones racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, hacemos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,.\,c}{b\,.\,d}$$

Ejemplo: Resolver y expresar como fracción irreducible $\left(\frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 9}\right).\left(\frac{5x + 15}{x^3 - 4x^2}\right)$

$$\left(\frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 9}\right).\left(\frac{5x + 15}{x^3 - 4x^2}\right) = \frac{(-x^2 + 4x).(5x + 15)}{(x^2 - 9).(x^3 - 4x^2)} = \frac{\cancel{-x}(\cancel{x-4}).5(\cancel{x+3})}{(x-3)(\cancel{x+3}).x^{\cancel{2}}(\cancel{x-4})} = \frac{-5}{x(x-3)}$$

Observa que luego de la multiplicación, factorizamos y simplificamos la expresión.

- **División:**

Llamamos inversa de una expresión racional $\frac{a}{b}$ a la expresión $\frac{b}{a}$ si **a** no es el polinomio nulo. Para dividir dos expresiones racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ multiplicamos la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}$$

Ejemplo: Hallar $\frac{5x + 10}{x^2 - 1} : \frac{3x + 6}{x + 1}$

$$\frac{5x + 10}{x^2 - 1} : \frac{3x + 6}{x + 1} = \frac{5x + 10}{x^2 - 1} \cdot \frac{x + 1}{3x + 6} = \frac{(5x + 10).(x + 1)}{(x^2 - 1).(3x + 6)} = \frac{5(\cancel{x+2})(\cancel{x+1})}{(x-1)(\cancel{x+1})3(\cancel{x+2})} = \frac{5}{3(x-1)}$$

✐<u>Ejercicio 32</u>: Resuelve las siguientes operaciones entre expresiones algebraicas racionales:

a) $\frac{3x}{x - 5} + \frac{x^2 - 5}{x - 5} - \frac{7x}{x - 5} =$

b) $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} =$

c) $\frac{3-x}{x^2+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} =$

d) $\frac{2x+6}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x-7} + \frac{x}{x+7} : \frac{x-7}{5} =$

e) $\frac{x^3-125}{x^2+5x+25} \cdot \frac{x^2+3x-10}{x^3-25x} : \frac{x^2+2x-15}{4x} =$

f) $\frac{5}{x^3+4x^2+4x} - \frac{2}{2x^3-8x} =$

g) $\frac{4x^2+20x}{2x^3+8x^2-10x} - \frac{1}{x^2-x} =$

h) $\frac{2x^2+12x+18}{x^3+3x^2+3x+1} \div \frac{4x^2-36}{x^2+2x+1} =$

i) $\frac{x^2+3x-10}{x^3-25x} \cdot \frac{x^3-125}{x^2+5x+25} \div \frac{x^2+2x-15}{4x} =$

FUNCIÓN RACIONAL FRACCIONARIA

Una función racional es de la forma:

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

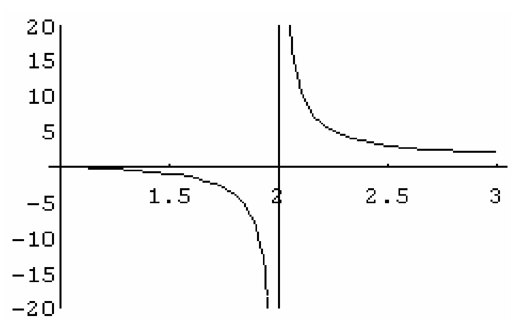
donde P y Q son polinomios (Q no es el polinomio nulo); suponemos que éstos no tienen ningún factor en común.

Las funciones racionales no están definidas para aquellos valores de x en los cuales el denominador Q(x) es cero, por esto decimos que el dominio de estas funciones es:

$$D_r = IR - \{\text{ceros del denominador}\}$$

Ejemplo:

Si $r(x) = \frac{x-1}{x-2}$, entonces su dominio es: $D_r = IR - \{2\}$



Los ceros de la función, son aquellos valores de x que anulan **<u>sólo</u>** el numerador P(x). En caso que la función presente valores de x que anulan simultáneamente el numerador y el denominador, dichos valores no son ceros de la función, sino indeterminaciones.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 49}{x - 7}$$

El numerador se anula con x = -7 y x = 7 ← **indeterminación**

El denominador se anula con x = 7

Por lo tanto, la función sólo tiene un cero: x = -7

✐<u>Ejercicio 33</u>: Define el dominio y el conjunto de los ceros de cada una de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 10}$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 4}$

c) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 16}{2x - 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

✐<u>Ejercicio 34</u>: Para la expresión algebraica "A", indica, si es posible:

a) Los valores de "x" que anulan la expresión
b) El conjunto de los números reales tales que la expresión "A" tenga sentido (es decir el dominio de la función racional)

$$A(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$$

<u>FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA</u>

Hasta aquí hemos revisado funciones algebraicas, pero a partir de ahora comenzaremos a estudiar funciones no algebraicas que reciben el nombre de funciones trascendentes.

Particularmente nos detendremos a revisar, funciones que son útiles para describir fenómenos en que una magnitud crece o decrece en forma muy rápida, proporcionalmente a su tamaño lo que nos señala que el ritmo de variación no permanece constante durante el tiempo. Estos tipos de fenómenos se modelizan mediante funciones exponenciales y logarítmicas. Algunos ejemplos de estos sucesos, que varían a lo largo del tiempo, los observamos en el crecimiento o decrecimiento de una población, en la desintegración radiactiva de una sustancia, la intensidad del sonido, la efectividad de una publicidad, la escala de Richter de los terremotos.

Función Exponencial

Si utilizamos la simbología general para representar una función y = f(x).

Para el caso de la función exponencial resulta la definición:

$$\mathbf{f: R \rightarrow R \,/\, f(x) = k.\, a^x}$$

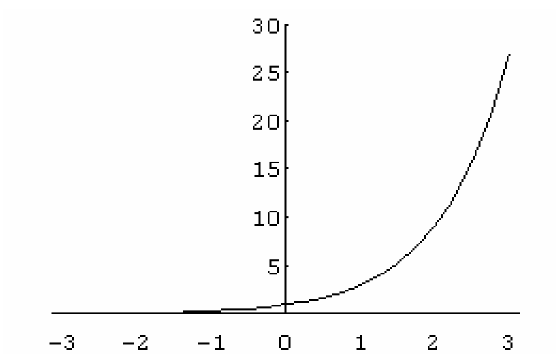
Siendo:

- ✓ $k \in R \wedge k \neq 0$ (coeficiente de la función exponencial)
- ✓ $a \in R \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$ (base de la función exponencial)
- ✓ x (exponente y variable independiente)

<u>Gráficas de funciones exponenciales</u>

Ejemplo 1: Consideremos que k = 1 y a >1, por ejemplo: $f(x) = 3^x$. Para graficar esta función, haremos una tabla de valores:

x	f(x)
-3	1/27
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27



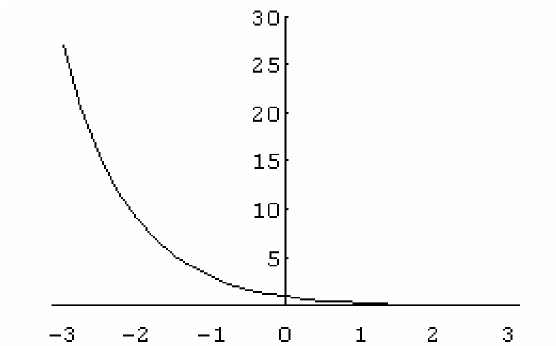
Al observar el gráfico de la función, podemos notar que:

- ✓ el dominio de la función es IR
- ✓ la imagen de la función es IR^+
- ✓ la ordenada al origen es 1 ($f(0) = 3^0 = 1$)
- ✓ es creciente
- ✓ no tiene ceros (no tiene punto de contacto con el eje x)

- ✓ tiene una asíntota horizontal de ecuación y=0

Ejemplo 2: Consideremos que k = 1 y 0<a <1, por ejemplo: f(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Para graficar esta función, haremos una tabla de valores:

x	f(x)
-3	27
-2	9
-1	3
0	1
1	1/3
2	1/9
3	1/27



Al observar el gráfico de la función, podemos notar que:

- ✓ el dominio de la función es IR
- ✓ la imagen de la función es IR^+
- ✓ la ordenada al origen es 1 (f(0) = 3^0 = 1)
- ✓ es decreciente
- ✓ no tiene ceros (no tiene punto de contacto con el eje x)
- ✓ tiene una asíntota horizontal de ecuación y=0

Al analizar los ejemplos anteriores, podemos concluir que si k >0, entonces:

- ➢ La función es creciente cuando a > 1.
- ➢ La función es decreciente cuando 0< a <1.

✐Ejercicio 35: Dada las funciones exponenciales f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y g(x) = 2^x, para cada una de ellas:

a) Represéntala gráficamente.
b) Define su conjunto dominio e imagen.
c) Halla la ordenada al origen
d) Calcula, si existen, los ceros.
e) Determina el crecimiento o decrecimiento.
f) Da la ecuación de su asíntota horizontal.

Ecuación Exponencial

Una ecuación es exponencial cuando la variable (incógnita) se presenta en el exponente.

Observa un ejemplo de cómo se pueden resolver algunas ecuaciones exponenciales, teniendo presente las propiedades de la potenciación en IR:

$27.3^{2x+3} = 9^{3x}$

$3^3.3^{2x+3} = \left(3^2\right)^{3x}$ $\rightarrow$ Realizamos la descomposición simple del 27 y del 9.

$3^{3+2x+3} = 3^{2.3x}$

$3^{6+2x} = 3^{6x}$ $\rightarrow$ Aplicamos el producto de potencias de igual base en el primer miembro y la potencia de otra potencia al el segundo miembro.

$6 + 2x = 6x$ $\rightarrow$ Planteamos la igualdad entre los exponentes.

$2x - 6x = -6$

$-4x = -6$ $\rightarrow$ Despejamos x.

$x = \dfrac{3}{2}$

Hay ecuaciones exponenciales en las cuales no es útil el método descrito anteriormente; en estos casos, debemos aplicar el logaritmo de ambos miembros y luego usar las propiedades de los logaritmos para bajar a x del exponente.

Ejemplo:

$3^{x+2} = 7$

$\log 3^{x+2} = \log 7$ $\rightarrow$ Aplicamos logaritmo a ambos miembros.

$(x+2).\log 3 = \log 7$ $\rightarrow$ Bajamos el exponente aplicando propiedad del logaritmo.

$x + 2 = \dfrac{\log 7}{\log 3}$ $\rightarrow$ Despejamos x.

$x = \dfrac{\log 7}{\log 3} - 2$

$x \approx -0{,}228756$

✐Ejercicio 36: Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{x+1} = 45$

b) $4^{x+1} = 8^{x-1}$

c) $3^{3x} \;.\; 9^{x} = 27^{x-2} : 81$

d) $2^{3x} . 4^{x} = 8^{x-2} : 16$

e) $3^{5x} : 9^{3x} = \dfrac{1}{9}$

f) $25^{2x} . 125^{4x-2} = 1$

Función Logaritmo

Toda función exponencial f(x) = a^x, con a>0 y a≠1, es una función biyectiva y, por lo tanto, tiene función inversa. La función inversa se conoce como la *función logaritmo con base a* y se denota como $\log_a$.

Esto nos lleva a la definición de la función logaritmo:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Se lee: logaritmo de **x** en base **a** es igual a **y**, si y sólo si, **a** elevado a la **y** es igual a **x.**

- ✓ $a \in R \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$ (base del logaritmo)
- ✓ $x \in R \wedge x > 0$ (argumento del logaritmo)
- ✓ y (logaritmo)

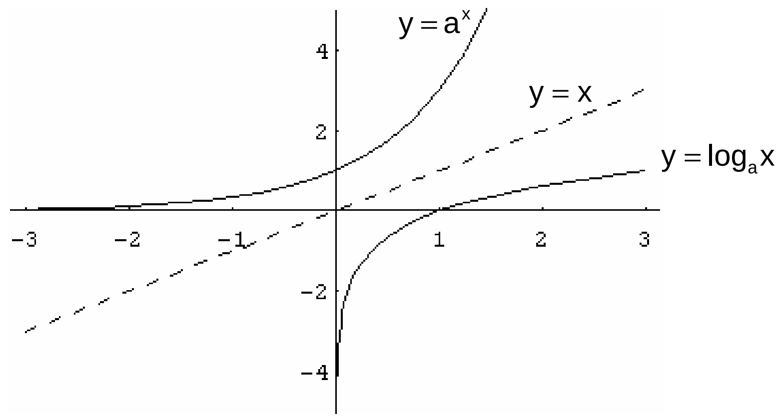
Cuando usamos la definición de logaritmos para intercambiar una de otra entre la *forma logaritmo* $\log_a x = y$, y la *exponencial* $a^y = x$, resulta útil notar que para ambas formas la base es la misma, por ejemplo:

Forma logaritmo	Forma exponencial
$\log_{10} 100000 = 5$	$10^5 = 100000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$

Gráficas de funciones logaritmo

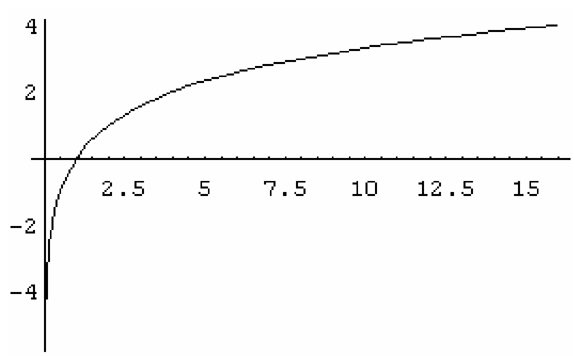
La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta y=x. La siguiente figura muestra el caso a>1. El hecho de que $y = a^x$ (para a>1) es una función que crece muy rápido, para x>0 implica que $y = \log_a x$ es una función que crece lentamente para x>1.

Observa que puesto que a^0=1, entonces $\log_a 1$=0 y, por lo tanto, la intersección en x de la función logaritmo es 1. Además, debido a que el eje x es una asíntota horizontal de $y = a^x$, el eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$.



Ejemplo1: consideremos que $f(x)=\log_2 x$. Para elaborar una tabla de valores, escogemos los valores de x como potencias de 2 para encontrar fácilmente sus logaritmos. Graficamos estos puntos y los unimos con una curva suave como en la figura.

x	f(x)
1	0
2	1
2^2	2
2^3	3
2^4	4
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4

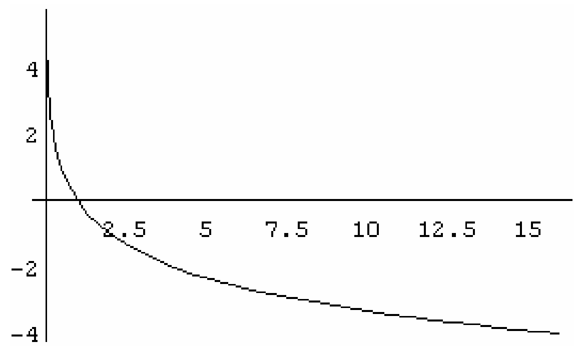


Al observar el gráfico de la función, podemos notar que:

- ✓ el dominio de la función es IR^+
- ✓ la imagen de la función es IR
- ✓ no tiene ordenada al origen
- ✓ es creciente
- ✓ el cero es x=1 ($\log_2 x = 0 \Rightarrow x = 2^0 = 1$)
- ✓ tiene una asíntota vertical de ecuación x=0

Ejemplo 2: consideremos que $f(x) = \log_{1/2} x$. Para elaborar una tabla de valores, escogemos los valores de x como potencias de 1/2 para encontrar fácilmente sus logaritmos.

x	f(x)
1	0
½	1
$(½)^2$	2
$(½)^3$	3
$(½)^4$	4
$(½)^{-1}$	-1
$(½)^{-2}$	-2
$(½)^{-3}$	-3
$(½)^{-4}$	-4



Al observar el gráfico de la función, podemos notar que:

- ✓ el dominio de la función es IR^+
- ✓ la imagen de la función es IR
- ✓ no tiene ordenada al origen
- ✓ es decreciente
- ✓ el cero es x=1 ($\log_{1/2} x = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$)
- ✓ tiene una asíntota vertical de ecuación x=0

Al analizar los ejemplos anteriores, podemos concluir, al igual que en la función exponencial, que:

- ➢ La función logaritmo es creciente cuando a > 1.
- ➢ La función logaritmo es decreciente cuando 0< a <1.

✎<u>Ejercicio 37</u>: Dada las funciones logarítmicas $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \log_{1/3} x$, para cada una de ellas:

a) Represéntala gráficamente.

b) Define su conjunto dominio e imagen.

c) Halla, si existe, la ordenada al origen

d) Calcula los ceros.

e) Determina el crecimiento o decrecimiento.

f) Da la ecuación de su asíntota vertical.

Ecuación Logarítmica

Una ecuación logarítmica es aquella en la cuál está presente la variable logaritmo. Por ejemplo:

$$\log_2(x+2)=5$$

Para despejar x escribimos la ecuación en forma exponencial ($\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$):

$$x+2=2^5$$
$$x=32-2$$
$$x=30$$

Otro aspecto importante, para la resolución de cálculos es tener presente las propiedades:

Logaritmo de un producto: $\log_b(a.m)=\log_b a+\log_b m$ $\log_b a+\log_b m=\log_b(a.m)$
Logaritmo de un cociente: $\log_b\left(\frac{a}{m}\right)=\log_b a-\log_b m$ $\log_b a-\log_b m=\log_b\left(\frac{a}{m}\right)$
Logaritmo de una potencia: $\log_b a^m = m\log_b a$ $m\log_b a=\log_b a^m$ $\log_b a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\log_b a$
Logaritmo de un número en esa misma base: $\log_b b=1 \Leftrightarrow b^1=b$
Logaritmo de uno en cualquier base: $\log_b 1=0 \Leftrightarrow b^0=1$
Logaritmo de la recíproca de la base: $\log_b\left(\frac{1}{b}\right)=-1 \Leftrightarrow b^{-1}=\frac{1}{b}$

Ejemplo 1: Queremos resolver la ecuación $\log_9(x-5)+\log_9(x+3)=1$:

$\log_9(x-5)+\log_9(x+3)=1$

$\log_9[(x-5).(x+3)]=1$ → Aplicamos propiedad: "logaritmo de un producto"

$(x-5).(x+3)=9^1$ → Escribimos la ecuación en forma exponencial

$x^2+3x-5x-15=9$

$x^2-2x-15-9=0$ → Despejamos x, resolviendo la ecuación cuadrática resultante.

$x^2-2x-24=0$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.(-24)}}{2.1}=\frac{2\pm 10}{2}$$

$x_1=6$

$x_2=-4$ (no es solución)

Luego, verificamos estas soluciones posibles en la ecuación original y determinamos que x_2 = -4 no es solución (porque los logaritmos de los números negativos no están definidos), sin embargo x_1 = 6 es una solución.

Ejemplo 2: Queremos resolver la ecuación $\log_5(x+1)-\log_5(x-1)=2$:

$\log_5(x+1)-\log_5(x-1)=2$

$\log_5\left[\frac{(x+1)}{(x-1)}\right]=2$ → Aplicamos propiedad: "logaritmo de un cociente"

$\frac{(x+1)}{(x-1)}=5^2$ → Escribimos la ecuación en forma exponencial

$\frac{(x+1)}{(x-1)}=25$ → Despejamos x, resolviendo la ecuación resultante.

$x+1=25.(x-1)$

$x+1=25x-25$

$x-25x=-25-1$

$-24x=-26$

$x=\frac{-26}{-24}$

$x=\frac{13}{12}$

✐Ejercicio 38: Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2-\log_5 x=0$
b) $\log_2 (x-1)=0$
c) $\log (x-2)+\log x=\log 8$ $(x>2)$
d) $\log (x-5)+\log (x+4)=1$ $(x>5)$
e) $\log_2 (x+1)-\log_2 x=2$
f) $\log (x^2-15x)=3$ $(x^2-15x>0)$

g) $\log_6(x+3)+\log_6(x+4)=1$

h) $\log x^3 - \frac{1}{2}\log x = \frac{5}{2}$

i) $\log_4(x^2-9)-\log_4(x+3)=3$

j) $\log(3x^2-5x-2)-\log(x-2)=1$

k) $\log(2x^2+7x-3)=0$

AUTOEVALUACIÓN N°3: FUNCIONES (II)

1) Factoriza, si es posible, los siguientes polinomios:

a) $10x^2 - 5x^4 + 10x - 5x^3 =$
b) $5x^3 - 40 =$
c) $x^4 + 16 =$
d) $(a+b)\,x^2 + 2\,(a+b)\,x + (a+b) =$
e) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 =$

(20 puntos)

2) Indica si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) , o falsas (F) . Justifica:

a) En el polinomio P(x) = $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ es P(-2) = 5 ( )
b) Si P(x) = $-3x + \frac{1}{3}$, entonces x = $\frac{1}{9}$ es cero o raíz de P(x) ( )
c) ($x^2 - 3$) es divisible por (x + 3) ( )
d) ($x^5 - 1$) es divisible por (x - 1) ( )
e) Si A(x) . (x+3) = $x^2 - 6x + 9$, entonces A(x) = x-3 ( )
f) El resto de dividir ($x^3 + 3x^2 + 1$) por (x + 4) es -15 ( )
g) La factorización de $x^2 - 2x + 4$ es $(x - 2)^2$ ( )
h) La factorización de ($x^3 + 27$) es (x-3) ($x^2 + 3x + 9$) ( )

(16 puntos)

3) Encuentra el valor de **"k"** en el siguiente polinomio para que ($2x^4 + \mathbf{k}x^2 + x + 4$):(x-2), tenga por resto 18 .

(5 puntos)

4) Encuentra el MCD, y el MCM entre los siguientes polinomios:

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
$Q(x) = x^2 + 4x + 4$
$S(x) = x^2 - 4$

(5 puntos)

5) Se sabe que $x_1 = 1$ es cero o raíz de $P(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 8$

a) Encuentra las otras dos raíces x_2 y x_3
b) Expresa el polinomio P(x) factorizado
c) Verifica que x_1 , x_2 y x_3 son raíces de P(x)

(10 puntos)

6) Simplifica la siguiente expresión algebraica racional:

$$\frac{x^3 - 49x}{x^3 - 14x^2 + 49x} =$$

(10 puntos)

7) Resuelve:

$$\frac{2}{x^2-9} + \frac{x+1}{x^2+6x+9} - \frac{1}{x-3} =$$

(10 puntos)

8) Encuentra el valor de "x":

a) $4^{3x-1} = 1024$

b) $2 . \log_{25} x - \log_{25}(25-4x) = 1/2$

(10 puntos)

9) Marca con una cruz la opción correcta:

I) Si $\log_4 \left(\frac{1}{x}\right) = 3$, entonces "x" es igual a:

a) -64 b) $\frac{1}{64}$ c) 64 d) $\frac{-1}{64}$

II) Si $\log_x 16 = \log_3 \frac{1}{9}$, "x" es igual a:

a) 1/2 b) 2 c) 4 d) 1/4

(6 puntos)

10) Determina el dominio y los ceros o raíces de la siguiente función racional:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x}$$

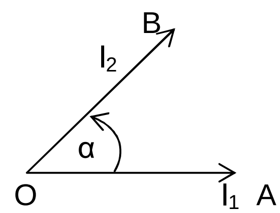
(8 puntos)

MÓDULO 4

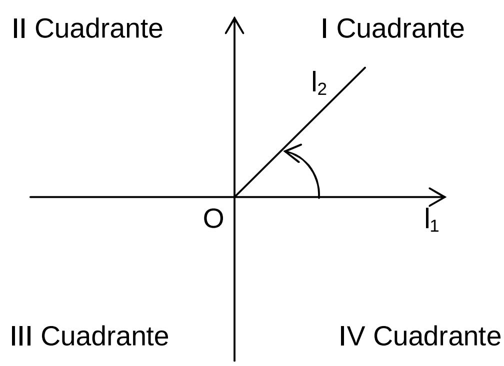
<u>FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS</u>

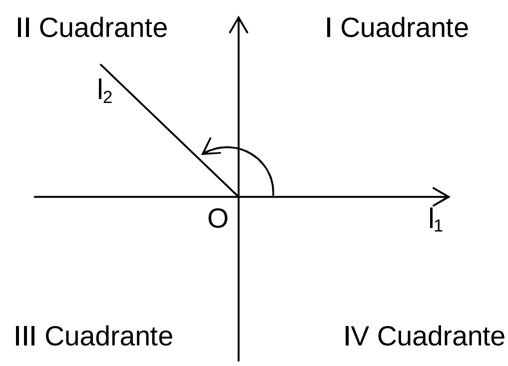
Ángulos

Un ángulo α en el plano es la región determinada por dos semirrectas l_1 y l_2 con origen común O, cuando se hace girar el lado terminal l_1 hasta el lado final l_2 en el sentido contrario al de las agujas del reloj, l_1 se denomina lado inicial y l_2 lado final de α y lo denotamos por $\alpha = A\hat{O}B$.



Si colocamos el origen de un ángulo $\alpha = A\hat{O}B$ en el origen de coordenadas y hacemos coincidir el lado inicial l_1 con el semieje positivo de las **x**, entonces el lado terminal l_2 quedará en algún cuadrante.





En la primer figura l_2 está en el primer cuadrante, y en la segunda, l_2 está en el segundo cuadrante. De esta manera, podemos hablar del cuadrante al que pertenece un ángulo α.
Por definición, los ángulos **agudos** son los que pertenecen al primer cuadrante.

Medida de ángulos

Para medir la amplitud de un ángulo tenemos diferentes sistemas de medición, nos ocuparemos de los dos más importantes: el sexagesimal y el circular o radial.

Sistema sexagesimal: La unidad de medida de amplitud angular, se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide 90º.
A la 60-ava parte de un grado se la llama **minuto** y se denota 1'; y la 60-ava parte de un minuto se la denomina **segundo** y se denota 1''. Si se quiere más precisión se consideran décimas, centésimas, etc de segundo.

Te recordamos las siguientes equivalencias:

$$1° = \frac{\text{ángulo recto}}{90}$$

$$1 \text{ minuto: } 1' = \frac{1°}{60} \quad , \quad 1 \text{ segundo: } 1'' = \frac{1'}{60} \quad , \quad 1° \equiv 60' \equiv 3600''$$

Ejemplos:

1) Un ángulo recto mide 90°

2) Un ángulo llano mide 180°

3) Expresar en grados, minutos y segundos el ángulo que mide 30,28°

$30{,}28° = 30° + 0{,}28°$

$1° \rightarrow 60'$

$0{,}28° \rightarrow 60' . 0{,}28 = 16{,}80' = 16' + 0{,}80'$

$1' \rightarrow 60''$

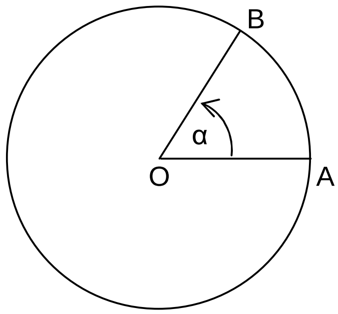
$0{,}80' \rightarrow 60'' . 0{,}80 = 48''$

$\mathbf{30{,}28° = 30°16'48''}$

✐Ejercicio 1: ¿A qué cuadrante pertenecen los siguientes ángulos?

$\alpha_1 = 300°$, $\alpha_2 = 192°$, $\alpha_3 = 93°$, $\alpha_4 = 150°$, $\alpha_5 = 35°$

Sistema circular o radial: Un radián representa la medida de un ángulo central de una circunferencia, de modo tal que la longitud del arco comprendido sea igual al radio de la circunferencia.



Longitud de arco AB = longitud del radio OA

<u>Paso de radianes a grados y de grados a radianes</u>: La longitud de la circunferencia es $2\pi r$. Por tanto, el número de radianes de un ángulo de un giro es 2π, ya que es el número de veces que el radio está contenido en la longitud de la circunferencia.

En símbolos: $360° = 2\,\pi rad$ y $1° = \dfrac{2\pi}{360} rad$

$$1\ rad = \frac{360}{2\pi}$$

Ejemplo: ¿Cuántos radianes son 225°?

$360° \rightarrow 2\ \pi rad$

$225° \rightarrow \dfrac{2\pi rad\ .\ 225°}{360°} = \dfrac{5}{4}\pi rad$

Ejemplo: ¿Cuántos grados son $\dfrac{\pi}{6} rad$?

$2\pi rad \rightarrow 360°$

$\dfrac{\pi}{6} rad \rightarrow \dfrac{360°.\ \dfrac{\pi}{6}}{2\pi} = 30°$

<u>Ejercicio 2</u>: Completa la siguiente tabla:

Grados	0	30°			90°		135°	150°		240°	270°		360°
Radianes	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{5}{3}\pi$	2π

✐Ejercicio 3: Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, indica y justifica si es posible construir un triángulo con los siguientes ángulos:

$$\alpha = \frac{1}{10}\pi \text{ rad} \qquad \beta = \frac{19}{45}\pi \text{ rad} \qquad \delta = \frac{43}{90}\pi \text{ rad}$$

✐Ejercicio 4: Indica si los siguientes ángulos pueden ser los ángulos agudos de un triángulo rectángulo:

α_1 = 0,25 rad $\qquad$ α_2 = 1,3 rad

✐Ejercicio 5: Sea el ángulo α = 2400°.

a) Encuentra un ángulo congruente con él, comprendido entre 0° y 360° y represéntalo gráficamente, indicando a qué cuadrante pertenece.

b) Exprésalo en rad y en π rad.

✐Ejercicio 6: Representa gráficamente cada uno de los siguientes ángulos, indicando a qué cuadrante pertenecen:

α = - 930° $\qquad$ β = - 1560°

✐Ejercicio 7: Dados los siguientes ángulos:

α = 125°
β = 240°
δ = 279°
ε = 381°
ϕ = 495°
φ = – 870°
ρ = – 1680°

a) Indica a qué cuadrante pertenecen.

b) Represéntalos gráficamente.

c) Exprésalos en el sistema circular o radial. (π rad y rad)

✐Ejercicio 8: Expresa los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal:

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi \text{ rad} \qquad \delta = \frac{13}{3}\pi \text{ rad} \qquad \rho = \frac{12}{5} \text{ rad}$$

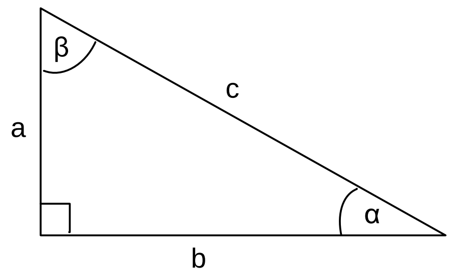
$$\beta = \frac{9}{4}\pi \text{ rad} \qquad \varepsilon = 6 \text{ rad} \qquad \varphi = 2{,}5 \text{ rad}$$

Triángulos Rectángulos

Consideremos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden **a** y **b** y su hipotenusa **c**. Sean α y β sus ángulos agudos:

Recuerda que en todo ***triángulo rectángulo***:

- ✓ La *hipotenusa* es el lado que se opone al *ángulo recto*.
- ✓ Los *catetos* son los lados que se oponen a los *ángulos agudos*.
- ✓ Los ángulos agudos son *complementarios*.



Las relaciones entre estas cantidades que conviene tener presente son:

1) El Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$
2) Las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$sen\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad sen\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b} \qquad tg\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$$

3) La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180˚, por lo que en un triángulo rectángulo: β = 90˚ - α

✐<u>Ejercicio 9</u>: Calcula la altura de una antena utilizada en sistema de comunicación sabiendo que su sombra mide 238 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 40˚ con el suelo.

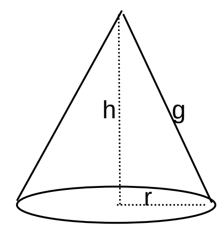
✐<u>Ejercicio 10</u>: En una fábrica necesitan construir una cinta transportadora para llevar la mercadería desde el depósito, en el subsuelo, hasta el salón de ventas, que está en la planta baja. La distancia vertical entre los dos salones es de 2,60 m. Si el ángulo de inclinación de la cinta será de 24˚, ¿qué longitud aproximada deberá tener la cinta?

✐Ejercicio 11: La siguiente figura es un cono de base circular, donde:

h = 7,5 cm: medida de la altura

g: medida de la generatriz

r = 3 cm: medida del radio de la base



Determina:

a) la medida de la generatriz g
b) el ángulo formado por la generatriz y el radio de la base.

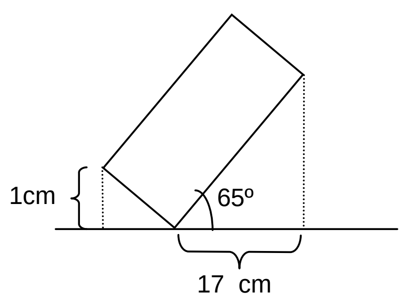
✐Ejercicio 12: Una escalera se apoya en una pared y tiene su pie a 3 metros de la misma. Si alcanza a una ventana que está a 6 m del suelo, contesta:

a) ¿Qué ángulo determina la escalera en el suelo?
b) ¿Cuánto mide la escalera?

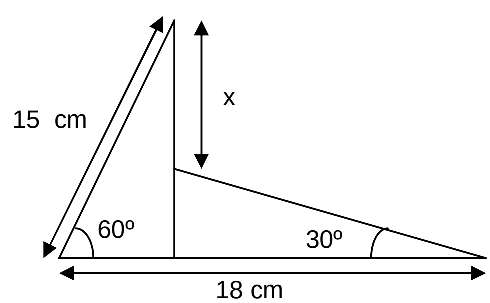
✐Ejercicio 13: Indica la distancia de un barco a un faro de 40 m de altura, si el ángulo que determina la visual dirigida a la luz del faro con el mar es de 12°.

✐Ejercicio 14: Calcula la superficie del rectángulo de la figura:

.

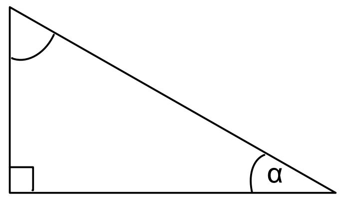


✐Ejercicio 15: Calcula el valor de x en la siguiente figura:

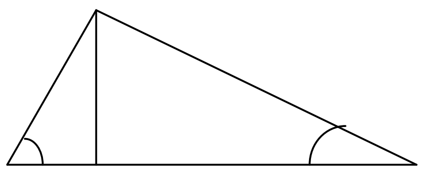


✐Ejercicio 16: El teodolito es un instrumento con el que trabajan los agrimensores y los topógrafos para medir ángulos y distancias. Para hallar la altura de un acantilado, se ubicó un teodolito a 20 m de su pie y se obtuvo un ángulo de elevación de 68°. Calcula la altura del acantilado.

✐Ejercicio 17: Se tiene el siguiente terreno. Calcula el perímetro para cercarlo si α = 30°.



✐Ejercicio 18: Un avión vuela entre dos ciudades A y B, a una altura de 7500 m. Calcula a qué distancia se encuentran las ciudades entre sí, sabiendo que los ángulos A y B son de 79º y 34º respectivamente.



✐Ejercicio 19: Marca la opción correcta

19.1) Una escalera se apoya en una pared y alcanza una altura de 5 m. El ángulo que forma la escalera con el piso es de 72°. La expresión para hallar la longitud de la escalera es:

a) $a = \frac{5}{\cos 18°}$ b) $a = \frac{5}{\cos 72°}$ c) a = 5 . sen 72° d) Ninguna es correcta

19.2) En un triángulo rectángulo un ángulo mide 25° y su cateto adyacente 17 cm. La expresión para calcular la hipotenusa a es:

a) a = 17 cos 25° b) $a = \frac{17}{\operatorname{sen} 65°}$ c) a = 17 sen 25° d) Ninguna es correcta

19.3) En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 10 cm. Entonces, el otro cateto y los ángulos agudos miden, respectivamente:

a) $\begin{cases} 11{,}18\text{ cm} \\ 33°\,41'\,24'' \\ 56°18'\,36'' \end{cases}$ b) $\begin{cases} 18{,}02\text{ cm} \\ 48°\,11'\,23'' \\ 41°48'\,37'' \end{cases}$ c) $\begin{cases} 11{,}18\text{ cm} \\ 48°\,11'\,23'' \\ 41°\,48'\,37'' \end{cases}$ d) Ninguna es correcta

19.4) La distancia entre dos edificios de igual altura es de 40 m. Desde la terraza de uno de ellos se observa una antena instalada en el otro, con un ángulo de elevación de 25°. La expresión para hallar la altura h de la antena es:

a) $\text{tg } 25° = \frac{40}{h}$ b) $\text{tg } 65° = \frac{40}{h}$ c) $\text{tg } 65° = \frac{h}{40}$ d) Ninguna es correcta

GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

La gráfica de una función nos ayuda a tener una mejor comprensión de su comportamiento.

Funciones seno y coseno:

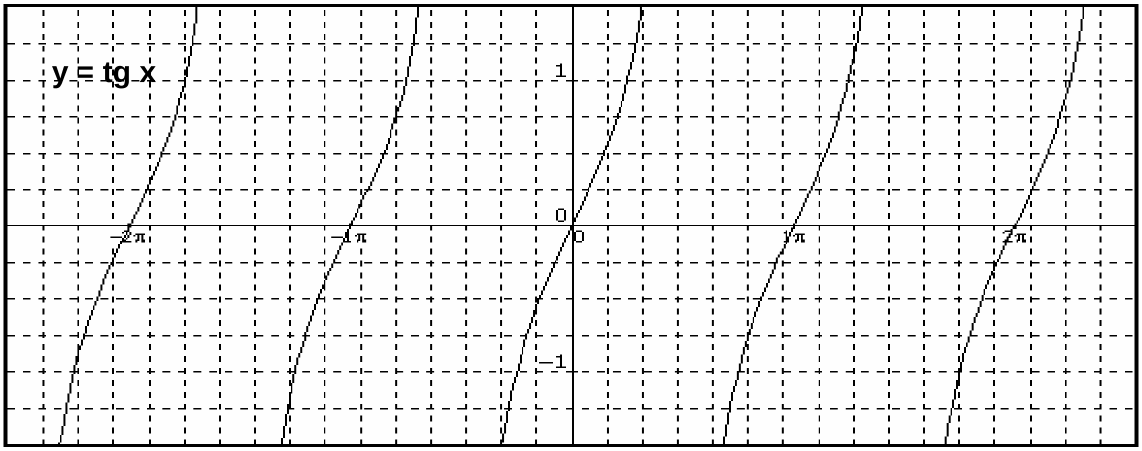
Para ayudarnos a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, primero notamos que estas funciones toman sus valores de manera periódica, es decir, repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar las gráficas entre 0 y 2π, elaboramos una tabla de valores:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
senx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

✏Ejercicio 20: Observa la tabla de valores correspondientes a las funciones seno y coseno y traza las graficas de cada una de ellas.

Función tangente:

Como la función tangente tiene un período π, solamente necesitamos trazar la gráfica en cualquier intervalo de longitud π y después repetir el patrón hacia la izquierda y hacia la derecha. A continuación te presentamos la gráfica de la función tangente.

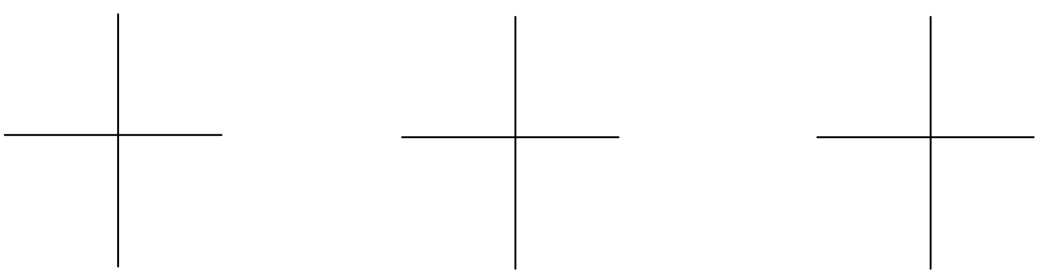


✐Ejercicio 21: Teniendo en cuenta las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente, completa el siguiente cuadro:

FUNCIÓN	DOMINIO	IMAGEN	CEROS	PERÍODO
SENO				
COSENO				
TANGENTE				

✐Ejercicio 22: Indica los signos de cada una de las funciones sen, cos y tg en los cuatro cuadrantes:

seno coseno tangente



✐Ejercicio 23: Analiza la variación (crecimiento-decrecimiento) de las funciones seno, coseno y tangente en los distintos cuadrantes y completa el cuadro:

FUNCIÓN	(0 ; 90°) I Cuadrante	(90° ; 180°) II Cuadrante	(180° ; 270°) III Cuadrante	(270° ; 360°) IV Cuadrante
SENO				
COSENO				
TANGENTE				

✐Ejercicio 24: Contesta verdadero (V) o falso (F). Justifica las respuestas falsas.

a) Las funciones coseno y tangente son ambas crecientes entre 90º y 180º. ( )

b) Existe algún ángulo x del 3er cuadrante tal que cos x $= -\frac{2}{3}$. ( )

c) Existe algún ángulo x del 4° cuadrante tal que tg x = -110. ( )

d) Para algún ángulo x tal que $0 \leq x < 2\pi$, se cumple que cosec x = 0,5 ( )

e) El dominio de la función tangente es el conjunto IR. ( )

f) Entre 180° y 360° el coseno es positivo. ( )

g) Es posible hallar en el 4° cuadrante un ángulo x tal que cos x = 0,5. ( )

AUTOEVALUACIÓN N°4: TRIGONOMETRÍA

1) Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones. Justifica las respuestas falsas.

a) Es posible hallar en el 3° cuadrante un ángulo x tal que cos x = - 1,02 ( )

b) La función seno es creciente entre 180° y 270°. ( )

c) El dominio de la función tangente es el conjunto R (reales). ( )

d) La imagen de la función seno es el conjunto R (reales). ( )

e) Entre 270° y 360° el coseno es positivo. ( )

f) La función coseno es decreciente entre 180° y 270°. ( )

g) El dominio de la función coseno es el conjunto [-1 ; 1]. ( )

(21 puntos)

2) Cada uno de los siguientes ítems tiene cuatro respuestas, de las cuales sólo una es correcta. Enciérrala o márcala con una cruz.

2.8) Un ángulo de $\frac{3}{2}\pi$ rad equivale a:

a) 270° b) 180° c) 90° d) ninguna es correcta

2.9) Un ángulo de **45°** equivale a:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) ninguna es correcta

2.10) Para un ángulo **x** tal que **90°< x < 180°** es:

a) cos x > 0 y sen x < 0

b) cos x < 0 y sen x > 0

c) cos x < 0 y sen x < 0

d) ninguna es correcta

2.11) Si para un ángulo x es **sen x < 0** y **cos x > 0**, entonces el ángulo **x** pertenece al:

a) III cuadrante b) IV cuadrante c) II cuadrante d) ninguna es correcta

2.12) Para **x = 3 π** es:

a) cos x = 1 b) sen x = 0 c) tg x = -1 d) ninguna es correcta

2.13) Si **cos x =** $\sqrt{2}$, entonces **x** es igual a:

a) 45° b) 60° c) 150° d) ninguna es correcta

2.14) Si **x** pertenece al **I cuadrante** y **sen 2x = 1**, entonces **x** es igual a:

a) 30° b) 45° c) 60° d) ninguna es correcta

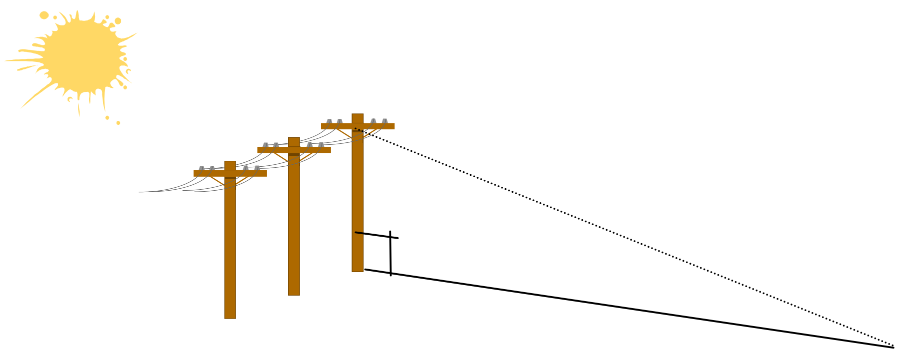
2.8) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide **5 cm** y uno de sus ángulos es de **30°**. Entonces uno de los catetos y el otro ángulo agudo miden respectivamente:

a) 2,5 cm y 90° b) 2,5 cm y 60° c) 4,3 cm y 30° d) ninguna es correcta

(48 puntos)

3) Resuelve el siguiente problema:

"Calcula la altura de un poste de una línea de alta tensión que proyecta una sombra de 10 m, cuando los rayos del sol forman con el piso un ángulo de 35º."



(19 puntos)

4) Encuentra el perímetro y la superficie de un rectángulo en el que un lado mide 10 cm y forma con la diagonal un ángulo de 20˚35'.

(12 puntos)